



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $E$ .

Pour tout polynôme  $P$ , on note  $P^{(k)}$  la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $P$ .

Soit  $Q \in E$  de degré  $n$ . Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on pose  $Q_i(X) = P(X+i)$ .

*Le but de l'exercice est de montrer que la famille  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  est une base de  $E$ .*

1)

Montrer que la famille  $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$  est une base de  $E$ .

2)

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit l'application  $f_k$  par :

$$f_k : E \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Vérifier que  $f_k$  est dans  $E^*$ .

b) Pour tout couple  $(k, \ell) \in (\llbracket 0, n \rrbracket)^2$ , calculer  $f_k(X^\ell)$ .

c) Montrer que  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une famille libre de  $E^*$ .

3)

Soit  $\varphi \in E^*$ .

a) Déterminer la dimension de  $E^*$ .

b) Montrer qu'il existe un unique  $(n+1)$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que

$$\forall P \in E, \varphi(P) = \sum_{i=0}^n a_i P^{(i)}$$

c) Soit  $\varphi \in E^*$  tel que  $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \dots = \varphi(Q_n) = 0$ . Montrer que  $\varphi = 0$ .

4)

On suppose que  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  n'est pas une base de  $E$ .

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $H$  de  $E$  tel que  $\dim(H) = n$  et  $\text{vect}(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) \subset H$ .

b) Montrer qu'il existe  $a \in E$  tel que  $E = \text{vect}(a) \oplus H$ .

c) On définit une application  $\psi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$  comme suit :

Pour tout  $x \in E$  s'écrivant  $x = \mu a + h$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $h \in H$ ,  $\psi_a(x) = \mu$

Montrer que  $\psi_a$  est une forme linéaire sur  $E$  et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.