ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Pour tout polynôme P, on note $P^{(k)}$ la dérivée k ème de P.

Soit $Q \in E$ de degré n. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_i(X) = P(X + i)$.

Le but de l'exercice est de montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ ***est une base de*** E***.***

1)

Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \ldots, Q^{(n)})$ est une base de E.

2)

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit l'application f_k par :

$$f_k \ : \ E \to \mathbb{R}, \ P \mapsto P^{(k)}(0)$$

a) Vérifier que f_k est dans E^*.

b) Pour tout couple $(k, \ell) \in ([\![0, n]\!])^2$, calculer $f_k(X^\ell)$.

c) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E^*.

3)

Soit $\varphi \in E^*$.

a) Déterminer la dimension de E^*.

b) Montrer qu'il existe un unique $(n+1)-$uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in E, \ \varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i P^{(i)}$$

c) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(Q_0) = \varphi(Q_1) = \cdots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$.

4)

On suppose que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ n'est pas une base de E.

a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\dim(H) = n$ et $\text{vect}(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n) \subset H$.

b) Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $E = \text{vect}(a) \bigoplus H$.

c) On définit une application $\psi_a \ : \ E \to \mathbb{R}$ comme suit :

Pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \mu a + h$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $h \in H$, $\psi_a(x) = \mu$

Montrer que ψ_a est une forme linéaire sur E et déterminer son noyau.

d) Aboutir à une contradiction et conclure.