ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 1

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1)

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant que l'on explicitera.

a) Montrer que pour tous réels a et b, on a : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.
En déduire que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

2)

Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(p\theta)\cos(q\theta)d\theta$.

Calculer $I(p, q)$.

3)

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente. On la note $\langle P, Q\rangle$.

Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $||\,.\,||$ la norme associée.

4)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est-elle orthonormale ?

5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n\rangle$.

6)

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de

$$d = \inf_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0))^2}{\sqrt{1-t^2}}dt}\right)$$

Jean MALLET