

## Problème

Dans tout le problème,  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  désigne un espace probabilisé. Soit  $(A_n)$  une suite d'événements de  $\mathcal{T}$  et on note alors :

$$A = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{n \geq N} A_n \right) \quad B = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{n \geq N} A_n \right)$$

1. (a) Justifier que  $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ .  
 (b) Ecrire les phrases logiques décrivant les assertions  $x \in A$  et  $x \in B$  et expliquer à l'aide d'une phrase pour chaque ce que désignent les événements  $A$  et  $B$ .  
 (c) Montrer que  $B \subset A$ .
  
2. On considère ici la suite des événements définis par  $\forall k \in \mathbb{N}, D_k = \bigcup_{n \geq k} A_n$ .  
 (a) Justifier que  $(D_k)$  est décroissante.  
 (b) On suppose que la série  $\sum_n P(A_n)$  converge. Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(D_k) = 0$ .  
 (c) En déduire que  $P(A) = 0$ . Que dire de  $P(B)$  ?
  
3. On suppose dans cette question que la série  $\sum_n P(A_n)$  diverge et que les  $A_n$  sont **deux à deux indépendants**.  
 (a) Justifier l'inégalité :  $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$ .  
 (b) Montrer que pour  $1 \leq m \leq n$  on a  $P\left(\bigcap_{k=m}^n \overline{A_k}\right) \leq \exp\left(-\sum_{k=m}^n P(A_k)\right)$ .  
 (c) En déduire que  $P(A) = 1$ . Que cela signifie-t-il ?
  
4. *Le singe dactylographe!* On considère une œuvre de la littérature de  $N$  caractères. Un singe tape au hasard des caractères sur un clavier en comportant  $C$  une infinité de fois. On se demande si l'œuvre en question a été tapé correctement au moins une fois.  
 (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A_n$  l'événement : "L'œuvre est correctement tapée entre le  $nN + 1$ -ème et le  $(n + 1)N$ -ème caractère. Donner  $P(A_n)$ .  
 (b) Justifier que les  $A_n$  sont tous indépendants et montrer alors que l'œuvre sera tapée correctement une infinité de fois par le singe (!).