Problème

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace probabilisé. Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{T}$ et on note alors :

$$A = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n \geqslant N} A_n \right) \qquad B = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geqslant N} A_n \right)$$

1. (a) Justifier que $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.
   (b) Ecrire les phrases logiques décrivant les assertions $x \in A$ et $x \in B$ et expliquer à l'aide d'une phrase pour chaque ce que désignent les événements A et B.
   (c) Montrer que $B \subset A$.

2. On considère ici la suite des événements définis par $\forall k \in \mathbb{N}, D_k = \bigcup_{n \geqslant k} A_n$.
   (a) Justifier que (D_k) est décroissante.
   (b) On suppose que la série $\sum_n P(A_n)$ converge. Montrer que $\lim_{k \to +\infty} P(D_k) = 0$.
   (c) En déduire que $P(A) = 0$. Que dire de $P(B)$?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_n P(A_n)$ diverge et que les A_n sont **deux à deux indépendants**.
   (a) Justifier l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant e^x$.
   (b) Montrer que pour $1 \leqslant m \leqslant n$ on a $P\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k} \right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} (A_k) \right)$.
   (c) En déduire que $P(A) = 1$. Que cela signifie-t-il ?

4. *Le singe dactylographe !* On considère une œuvre de la littérature de N caractères. Un singe tape au hasard des caractères sur un clavier en comportant C une infinité de fois. On se demande si l'œuvre en question a été tapé correctement au moins une fois.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit A_n l'événement : "L'œuvre est correctement tapée entre le $nN + 1$-ème et le $(n+1)N$-ème caractère. Donner $P(A_n)$.
   (b) Justifier que les A_n sont tous indépendants et montrer alors que l'œuvre sera tapée correctement une infinité de fois par le singe (!).