# Problème

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace probabilisé. Soit $(A_n)$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$ et on note alors :

$$A = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{n\geqslant N} A_n \right) \qquad B = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left( \bigcap_{n\geqslant N} A_n \right)$$

1. (a) Justifier que $(A, B) \in \mathcal{T}^2$.
   (b) Ecrire les phrases logiques décrivant les assertions $x \in A$ et $x \in B$ et expliquer à l'aide d'une phrase pour chaque ce que désignent les événements $A$ et $B$.
   (c) Montrer que $B \subset A$.

2. On considère ici la suite des événements définis par $\forall k \in \mathbb{N}, D_k = \bigcup_{n\geqslant k} A_n$.
   (a) Justifier que $(D_k)$ est décroissante.
   (b) On suppose que la série $\sum_n P(A_n)$ converge. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} P(D_k) = 0$.
   (c) En déduire que $P(A) = 0$. Que dire de $P(B)$ ?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_n P(A_n)$ diverge et que les $A_n$ sont **deux à deux indépendants**.
   (a) Justifier l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leqslant e^x$.
   (b) Montrer que pour $1 \leqslant m \leqslant n$ on a $P\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=m}^{n}(A_k)\right)$.
   (c) En déduire que $P(A) = 1$. Que cela signifie-t-il ?

4. *Le singe dactylographe !* On considère une œuvre de la littérature de $N$ caractères. Un singe tape au hasard des caractères sur un clavier en comportant $C$ une infinité de fois. On se demande si l'œuvre en question a été tapé correctement au moins une fois.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $A_n$ l'événement : "L'œuvre est correctement tapée entre le $nN + 1$-ème et le $(n + 1)N$-ème caractère. Donner $P(A_n)$.
   (b) Justifier que les $A_n$ sont tous indépendants et montrer alors que l'œuvre sera tapée correctement une infinité de fois par le singe (!).