

## Problème

### Sur le problème aux limites dans une équations différentielle linéaire d'ordre 2 - d'après le concours ESIM

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels. Soit alors **(P)** le problème suivant :

**Trouver  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, 1]$  telle que :** 
$$\begin{cases} f''(x) = a(x)f(x) + b(x)f'(x) + c(x) \\ f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta \end{cases}$$

Il s'agit précisément du *problème aux limites* (en 0 et 1) pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2. En particulier, **il ne s'agit pas du problème de Cauchy**.

1. Justifier l'existence et l'unicité de deux fonctions  $g$  et  $h$  solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} g''(x) = a(x)g(x) + b(x)g'(x) \\ g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} h''(x) = a(x)h(x) + b(x)h'(x) + c(x) \\ h(0) = \alpha \text{ et } h'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Soit  $f$  une solution de **(P)**. Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $f = h + \lambda g$ .

3. Montrer que si  $g(1) \neq 0$ , alors **(P)** admet une unique solution.

4. Soit l'équation différentielle  $(E) : y'' = -(1 + \pi^2)y + 2y' + x$ .

(a) Déterminer les solutions de  $(E)$  sur  $[0, 1]$ .

(b) Existe-t-il des solutions de  $(E)$  vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 2$  ?

5. Soit maintenant  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  vérifiant  $f(0) = f(1) = 0$ .

(a) Montrer que la fonction  $q : x \mapsto \frac{f(x)}{\sin(\pi x)}$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$ .

(b) On suppose ici que  $q$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

i. Calculer  $\int_0^1 q'(x)q(x) \sin(2\pi x) dx$  en fonction de  $\int_0^1 [q(x)]^2 \cos(2\pi x) dx$ .

ii. Montrer alors que  $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$ .

(c) Montrer que l'inégalité précédente reste vraie si  $q$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

6. On suppose dans cette question que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$  on a  $b(x) = 0$  et  $a(x) > -\pi^2$ . Montrer que **(P)** admet une unique solution.

*Indication : Considérer  $\int_0^1 g''(x)g(x) dx$  en intégrant par parties où  $g$  est définie à la première question.*

## Indications

1. Identifier les problèmes posés comme des problèmes de Cauchy.
2. Identifier de quel problème de Cauchy est solution la fonction  $f - h$ . Regarder en particulier sa dérivée en 1 pour l'obtention de  $\lambda$ .
3. Si  $g(1) \neq 0$ , expliciter l'unique valeur de  $\lambda$  possible dans l'écriture précédente.
4. (a) Il s'agit d'une équation à coefficients constants. On applique la méthode de résolution par l'équation caractéristique. Pour la solution particulière, la recherche sous forme affine.  
  
(b) Calculer les paramètres de la solution précédemment trouvée vérifiant  $y(0) = 1$  et  $y(1) = 2$  (s'ils existent).
5. (a) Etudier l'existence de limite de  $q$  en 0 et en 1. On pourra faire appel à des développements limités.  
  
(b) i. Procéder à une intégration par parties sur le terme  $\int_0^1 q'(x)q(x) \sin(2\pi x) dx$ .  
  
ii. Réexprimer les intégrales en jeu en fonction de  $q$ . Après des réductions trigonométriques, montrer que la différence entre les deux intégrales peut s'estimer en fonction d'une intégrale de fonction positive.  
  
(c)  $q$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle ouvert  $]0, 1[$ . On pourra reprendre les calculs d'intégrales précédentes sur un segment  $[a, b]$  quelconque de  $]0, 1[$  pour tenter d'approcher le résultat sur  $[0, 1]$ .
6. On note qu'il y a existence et unicité de la solution si  $g(1) \neq 0$ . Supposer par l'absurde que  $g(1) = 0$  et étudier le terme  $\int_0^1 g''(x)g(x) dx$  (en intégrant par parties) pour obtenir une contradiction.