Problème

Sur le problème aux limites dans une équations différentielle linéaire d'ordre 2 - d'après le concours ESIM

Soit a, b et c trois fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Soit α et β deux nombres réels. Soit alors **(P)** le problème suivant :

Trouver f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que : $\begin{cases} f''(x) = a(x)f(x) + b(x)f'(x) + c(x) \\ f(0) = \alpha \textbf{ et } f(1) = \beta \end{cases}$

Il s'agit précisément du *problème aux limites* (en 0 et 1) pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2. En particulier, **il ne s'agit pas du problème de Cauchy**.

1. Justifier l'existence et l'unicité de deux fonctions g et h solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} g''(x) = a(x)g(x) + b(x)g'(x) \\ g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} h''(x) = a(x)h(x) + b(x)h'(x) + c(x) \\ h(0) = \alpha \text{ et } h'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Soit f une solution de **(P)**. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f = h + \lambda g$.
3. Montrer que si $g(1) \neq 0$, alors **(P)** admet une unique solution.
4. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' = -(1+\pi^2)y + 2y' + x$.
   (a) Déterminer les solutions de (E) sur $[0,1]$.
   (b) Existe-t-il des solutions de (E) vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$?
5. Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction $q : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sin(\pi x)}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
   (b) On suppose ici que q est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
      i. Calculer $\displaystyle\int_0^1 q'(x)q(x)\sin(2\pi x)dx$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 [q(x)]^2\cos(2\pi x)dx$.
      ii. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geqslant \pi^2 \int_0^1 [f(x)]^2 dx$.
   (c) Montrer que l'inégalité précédente reste vraie si q n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
6. On suppose dans cette question que pour tout x de $[0,1]$ on a $b(x) = 0$ et $a(x) > -\pi^2$. Montrer que **(P)** admet une unique solution.
   Indication : Considérer $\displaystyle\int_0^1 g''(x)g(x)dx$ *en intégrant par parties où g est définie à la première question.*

Indications

1. Identifier les problèmes posés comme des problèmes de Cauchy.

2. Identifier de quel problème de Cauchy est solution la fonction $f - h$. Regarder en particulier sa dérivée en 1 pour l'obtention de λ.

3. Si $g(1) \neq 0$, expliciter l'unique valeur de λ possible dans l'écriture précédente.

4. (a) Il s'agit d'une équation à coefficients constants. On applique la méthode de résolution par l'équation caractéristique. Pour la solution particulière, la cherche sous forme affine.

   (b) Calculer les paramètres de la solution précédemment trouvée vérifiant $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$ (s'ils existent).

5. (a) Etudier l'existence de limite de q en 0 et en 1. On pourra faire appel à des développements limités.

   (b) i. Procéder à une intégration par parties sur le terme $\displaystyle\int_0^1 q'(x)q(x)\sin(2\pi x)dx$.

   ii. Réexprimer les intégrales en jeu en fonction de q. Après des réductions trigonométriques, montrer que la différence entre les deux intégrales peut s'estimer en fonction d'une intégrale de fonction positive.

   (c) q est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0,1[$. On pourra reprendre les calculs d'intégrales précédentes sur un segment $[a,b]$ quelconque de $]0,1[$ pour tenter d'approcher le résultat sur $[0,1]$.

6. On note qu'il y a existence et unicité de la solution si $g(1) \neq 0$. Supposer par l'absurde que $g(1) = 0$ et étudier le terme $\displaystyle\int_0^1 g''(x)g(x)dx$ (en intégrant par parties) pour obtenir une contradiction.