BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 27 avril 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ à son unique cœfficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ ($q \in \mathbf{N}^*$), *on admet* que ${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.
   a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
   Déterminer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$; donner une base de $\operatorname{Im} f$ et préciser la dimension de $\operatorname{Ker} f$.
   c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On suppose que n et p vérifient : $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.
   On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, \ldots, V_p$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\operatorname{Ker} g$.
   b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.
   c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir des deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose : $\mathcal{D} = \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $z = \dfrac{x}{y}$.*

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}, \quad f(x,y) = \left(c\,x^\theta + (1-c)\,y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \qquad (\textit{fonction de production CES}).$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement**, on prend $\theta = -1$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

   a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = \dfrac{2\,x\,y}{x+y}$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

   b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = \dfrac{2\,t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbf{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbf{R}_+^*$.

   c) On rappelle que $z = \dfrac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = y\,w(z)$.

   d) Vérifier pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x,y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x,y) = U(z)$.

2.a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda\,x, \lambda\,y) = \lambda\,f(x,y)$.

   b) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

   c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \longmapsto \partial_1(f)(x,y)$.
   De même, déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \longmapsto \partial_2(f)(x,y)$.

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x,y) = \dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $g(t) = \dfrac{c}{1-c}\,t^{-1+\theta}$.

   a) Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x,y)$ en fonction de $g(z)$.

   b) Pour tout $t > 0$, on pose : $s(t) = -\dfrac{g(t)}{t\,g'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.

4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t,1)$ et $U(t) = w(t) - t\,w'(t)$.

   a) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x,y) = y\,w(z)$.

   b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbf{R}_+^*$.
   Préciser $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} U(t)$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} U(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbf{R}_+^*$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1,1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda\,x, \lambda\,y) = \lambda\,\Psi(x,y)$.

De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto \partial_1(\Psi)(x,y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \longmapsto \partial_2(\Psi)(x,y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ v(t) = \Psi(t, 1)$.
   a) Justifier que la fonction v est de classe C^2, strictement croissante et concave sur $\mathbf{R}_+^*$.
   b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t > 0,\ \varphi(t) = v(t) - t\,v'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geqslant 0$.

      Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu < 1$.
   c) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = y\,v(z)$.

6.a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \dfrac{v'(t)}{\varphi(t)}\cdot$ Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x, y)}{\partial_2(\Psi)(x, y)} = h(z)$.

   b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\dfrac{h(t)}{t\,h'(t)}\cdot$ Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbf{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose que $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \dfrac{1}{\sigma_0}\cdot$
   a) Pour tout $t > 0$, on pose : $\ell(t) = t^{1-r}\,h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0,\ h(t) = h(1)\,t^{r-1}$.
   b) Par une méthode analogue à celle de la question 7.a), établir la relation : $\forall t > 0,\ v(t) = \left(\dfrac{1 + h(1)\,t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$.
   c) En déduire l'existence d'une constante $a \in \,]0, 1[$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ \Psi(x, y) = \left(a\,x^r + (1 - a)\,y^r\right)^{\frac{1}{r}}$.
   d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions 3.b) et 7.c) ?

8. Soit $a \in \,]0, 1[$. Pour tout $t > 0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty, 1[\,\setminus\{0\}$ par : $S_t(r) = \left(a\,t^r + (1 - a)\right)^{\frac{1}{r}}$.
   a) On pose : $H_t(r) = \ln S_t(r)$. Calculer la limite de $S_t(r)$ lorsque r tend vers 0.
   b) Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{D}$ fixé, on pose : $N_{(x,y)}(r) = y\,S_z(r)$ et $F(x, y) = \lim\limits_{r \to 0} N_{(x,y)}(r)$.

      Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $F(x, y) = x^a\,y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Partie III. Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas.

Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et B un réel strictement positif.

On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production f de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :
$$\forall (x, y) \in \mathcal{D},\ f(x, y) = B\,x^a\,y^{1-a}\,.$$
- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme $\exp(R)$ où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2 > 0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :
$$Q = B\,x^a\,y^{1-a}\,\exp(R)\,.$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose : $b = \ln B$, $u = \ln x - \ln y$ et $T = \ln Q - \ln y$. On a donc : $T = au + b + R$.

On sélectionne n entreprises ($n \geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.

On mesure pour chaque entreprise i ($i \in [\![1, n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $Q_i^* > 0$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $Q_i = B\,x_i^a\,y_i^{1-a}\,\exp(R_i)$, où $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.

On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $u_i = \ln x_i - \ln y_i$, $T_i = \ln Q_i - \ln y_i$ et $t_i = \ln Q_i^* - \ln y_i$.

Ainsi, pour chaque entreprise $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $T_i = au_i + b + R_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.

On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - \overline{v}^2$.
- Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i,w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, notée $\mathrm{Cov}(v,w)$, est donnée par : $\mathrm{Cov}(v,w) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})(w_i-\overline{w}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_iw_i - \overline{v}\,\overline{w} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})w_i$.

9.a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}(au_i+b,\,\sigma^2)$.

b) Les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbf{R}$ de T_i : $\forall\, d \in \mathbf{R},\ \varphi_i(d) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\big(d-(au_i+b)\big)^2\right)$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ouvert défini par $\mathcal{F} =]\,0,1\,[\times\mathbf{R}$ et M la fonction de $\mathcal{F}$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $M(a,b) = \ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t_i)\right)$.

On suppose que : $0 < \mathrm{Cov}(u,t) < s_u^2$.

10.a) Calculer le gradient $\nabla(M)(a,b)$ de M en tout point $(a,b)\in\mathcal{F}$.

b) En déduire que M admet sur $\mathcal{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a},\hat{b})$.

c) Exprimer $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\mathrm{Cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.

($\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance)

11.a) Soit $\nabla^2(M)(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b)\in\mathcal{F}$. Montrer que : $\nabla^2(M)(a,b) = -\dfrac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2+\overline{u}^2 & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$.

b) En déduire que M admet au point $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum local.

12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b})$.

En déduire que M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum global.

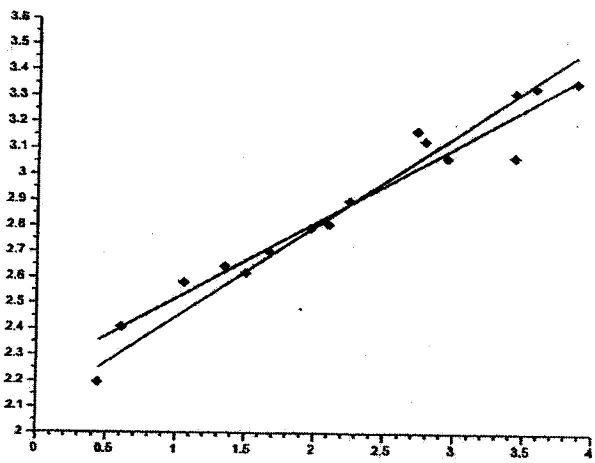
13. On rappelle qu'en *Scilab*, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.

Si $v=(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $w=(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i,w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `corr(v,w,1)`.

On a relevé pour $n=16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 16}$ et $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant 16}$ reproduites dans les lignes (1) et (2) du code *Scilab* suivant dont la ligne (5) est incomplète :

```
(1)  u=[1.06,0.44,2.25,3.88,0.61,1.97,3.43,2.10,1.50,1.68,2.72,1.35,2.94,2.78,3.43,3.58];

(2)  t=[2.58,2.25,2.90,3.36,2.41,2.79,3.32,2.81,2.62,2.70,3.17,2.65,3.07,3.13,3.07,3.34]

(3)  plot2d(u,t,-4) // -4 signifie que les points sont représentés par des losanges.

(4)  plot2d(u,corr(u,t,1)/variance(u)*u+mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))// équation de la
       droite de régression de t en u.

(5)  plot2d(u,..........................................................)// équation de la
       droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne (5) donne alors la figure suivante :



a) Compléter la ligne (5) du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne (5) complétée*).

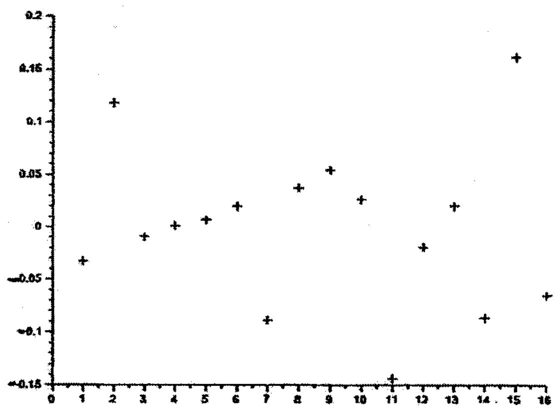
b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

e) On reprend les lignes (1) et (2) du code précédent que l'on complète par les instructions (6) à (11) qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
(6)    a0=corr(u,t,1)/variance(u)

(7)    b0=mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)

(8)    t0=a0*u+b0

(9)    e=t0-t

(10)   p=1:16
```



(11) `plot2d(p,e,-1) // -1` *signifie que les points sont représentés par des symboles d'addition.*

Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ? Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $A_n = \dfrac{1}{ns_u^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u})\, T_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

a) Calculer l'espérance $E(A_n)$ et la variance $V(A_n)$ de la variable aléatoire A_n. Préciser la loi de A_n.

b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

HEC VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE

1–a)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; ; \; A = X{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = (x_i x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

En effet, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, donc $X{}^tX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le terme de la i ème ligne j ème colonne de A est obtenu en multipliant le terme de la i ème ligne de X (soit x_i) avec celui de la j ème colonne de ${}^tX$ (soit x_j).

On remarque que ${}^tXX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, c'est donc un réel.

$$\alpha = {}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

1–b)

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_j & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & & x_2x_j & & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_ix_1 & x_ix_2 & & x_ix_j & & x_ix_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_nx_j & \dots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

On remarque que la j ème colonne de $A = x_j \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_j X$.

Il en résulte que $\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}(X) = \operatorname{Im} f$. Or $X \neq (0) \Longrightarrow \boxed{\dim \operatorname{Im} f = 1}$.

Appliquons le théorème du rang à f.

$\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$. Or $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, il vient $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = n-1}$

1–c)

On remarque que A est symétrique réelle, car $x_ix_j = x_jx_i$; elle est donc diagonalisable (ainsi que f). Notons $E(\lambda, f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur λ.

- $\operatorname{Ker} f \neq \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} f = E(0, f)$. Il s'ensuit que $\dim E(0, f) = n-1$ d'après le b).

Sachant que f est diagonalisable, le deuxième sous-espace propre est de dimension un.

• $AX = (X^tX)X = X(^tXX) = X(\alpha) = \alpha X$. Le vecteur X n'est pas nul, c'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur $\alpha \neq 0$. Donc $\text{vect}(X) \subset E(\alpha, f)$; $\text{vect}(X) \neq \{0\}$, donc $\dim \text{vect}(X) = 1$.

Par suite $\text{vect}(X) \subset E(\alpha, f)$ et $\dim \text{vect}(X) = \dim E(\alpha, f) = 1 \Longrightarrow E(\alpha, f) = \text{vect}(X)$.

D'autre part, $\operatorname{Im} f = \text{vect}(X)$; donc $E(\alpha, f) = \operatorname{Im} f$.

$\dim E(\alpha, f) + \dim E(0, f) = n$; il n'y a pas d'autres valeurs propres que α et 0.

$$\boxed{f \text{ admet deux sous-espaces propres } E(\alpha, f) = \operatorname{Im} f \text{ et } E(0, f) = \operatorname{Ker} f}$$

2–a)

Par définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases données, $(V_1, \ldots, V_p)$ est l'image par g de la base canonique B_p de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

$\operatorname{Im} g = \text{vect}(V_1, \ldots, V_p)$. Par hypothèse la famille $(V_1, \ldots, V_p)$ est libre, elle constitue donc une base de $\text{vect}(V_1, \ldots, V_p)$.

$$\dim \operatorname{Im} g = p$$

Appliquons à g le théorème du rang : $\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g$. Or $\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Im} g = p$, donc $\dim \operatorname{Ker} g = 0$.

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} g = 0 \Longleftrightarrow g \text{ injective}}$$

2–b)

Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. $VY = 0 \Longrightarrow {}^tVVY = 0$. Assurons-nous que ce produit a un sens.

$V \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \Longrightarrow VY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $V \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \Longrightarrow {}^tV \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$; donc le produit ${}^tVVY$ a un sens et ${}^tVVY \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, ${}^tVVY = 0 \Longrightarrow {}^tY{}^tVVY = 0$.

${}^tVVY \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tY \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ donc ${}^tY{}^tVVY$ a un sens et

${}^tY{}^tVVY \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Or ${}^tY{}^tVVY = {}^t(VY)VY$ (propriété admise dans l'énoncé).

Remarquons que $VY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et notons $VY = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$;

$${}^t(VY)VY = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

$${}^t(VY)VY = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ y_i = 0 \Longleftrightarrow VY = 0.$$

$$\boxed{\forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ VY = 0 \Longleftrightarrow {}^tVVY = 0}$$

2–b)

${}^tVV \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tVVY = 0$. On a alors $VY = 0$.

D'après le point a), g injective donc $VY = 0 \Longrightarrow Y = 0$.

Conclusion , ${}^tVVY = 0 \Longrightarrow Y = 0$. L'endomorphisme de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ associé canoniquement à ${}^tVV$ est injectif. Comme $\dim \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est finie, on en conclut que cet endomorphisme est bijectif.

$$\boxed{\text{La matrice } {}^tVV \text{ est inversible}}$$

PROBLEME

PARTIE I : fonction de production CES

1–a)

Pour $\theta = -1$, $c = \frac{1}{2}$, $f(x,y) = (\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y})^{-1} = (\frac{x+y}{2xy})^{-1} = \frac{2xy}{x+y}$.

Les fonctions polynomiales $(x,y) \mapsto 2xy$ et $(x,y) \mapsto x+y$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathcal{D}$. De plus $x+y$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, donc f est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\partial_1(f)(x,y) = 2\frac{y^2}{(x+y)^2}$ et $\partial_2(f)(x,y) = 2\frac{x^2}{(x+y)^2}$ sans problème.

1–b)

$w'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$, $U(t) = w(t) - tw'(t) = \frac{2t}{1+t} - \frac{2t}{(1+t)^2}$. Il est clair que w est indéfiniment dérivable pour $t > 0$. Donc U également.

$\forall t > 0$, $U'(t) = w'(t) - (w'(t) + tw''(t)) = -tw''(t)$; $w'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$ et $w''(t) = -\frac{4}{(1+t)^3}$, par suite $U'(t) = \frac{4t}{(1+t)^3} \geq 0$

t	0	$+$	$+\infty$
U	0	$\nearrow$	2

$\lim\limits_{t\to 0+} U(t) = 0$ sans problème ;

$\frac{2t}{1+t} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2t}{t} = 2$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{1+t} = 2$.

$\frac{2t}{(1+t)^2} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2t}{t^2} = \frac{2}{t}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{(1+t)^2} = 0$: par suite $\lim\limits_{t\to+\infty} U(t) = 2$.

$U''(t) = -w''(t) - tw'''(t)$; $w'''(t) = \frac{12}{(1+t)^4}$, donc

$U''(t) = \frac{4}{(1+t)^3} - 12\frac{t}{(1+t)^4} = \frac{4}{(1+t)^4}(1+t-3t) = \frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}$

$1 - 2t > 0 \iff 2t < 1 \iff t < \frac{1}{2}$, donc $U''(t) > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $U''(t) < 0$ sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

U est convexe sur $]0, \frac{1}{2}[$ et concave sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

1–c)

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x+y} = 2\frac{xy}{y(\frac{x}{y}+1)} = 2y\frac{x}{y}\frac{1}{1+\frac{x}{y}} = 2y\frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}.$$

$$\boxed{f(x,y) = 2y\frac{z}{1+z} = 2yw(z)}$$