ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2016

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 7 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.

   (d) Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$$

   et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{array}$$

   (a) Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.

   (b) Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \displaystyle\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n}(X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k)Q_k(X).$$

   (a) Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   (b) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

   (d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k\}$, on a :

$$Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

(f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

En observant le terme dominant de S, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) À l'aide des résultats des questions question 1(d) et 3(f), montrer que la fonction f admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.
   (b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

PROBLÈME

Partie A

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a(1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$

   (c) En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

   (d) Justifier que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres** a **et** b.
   (a) Montrer que X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$

   (b) Montrer que X admet une variance et que :

$$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$

   (c) Soit F la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k(1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage ».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à Scilab.

(a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res = tirage(x,y)
        r = rand()
        if .......... then
                res = 0
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

(b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
function Xn = experience(a,b,n)
        x = a
        y = b
        for k=1:n
                r = tirage(x,y)
                if r = = 0 then
                        x = ..........
                else
                        ...........
                end
        end
        Xn = .........
endfunction
```

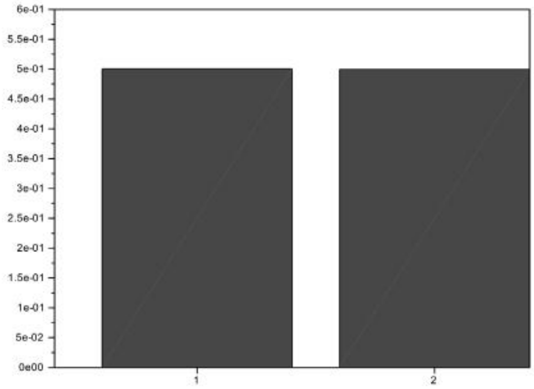
(c) Écrire une fonction Scilab d'en tête :

```
        function loi = simulation(a,b,n,m)
```

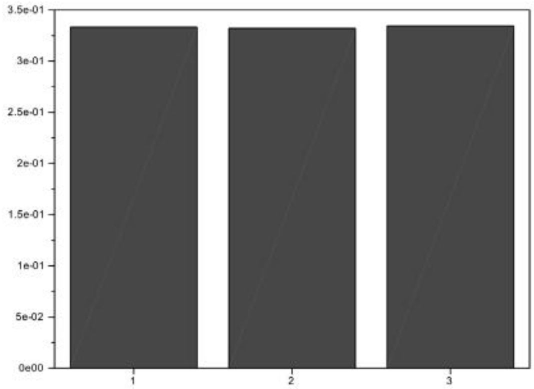
qui fait appel `m` fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \dots, P(X_n = n)$.

5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en « bâtons ».

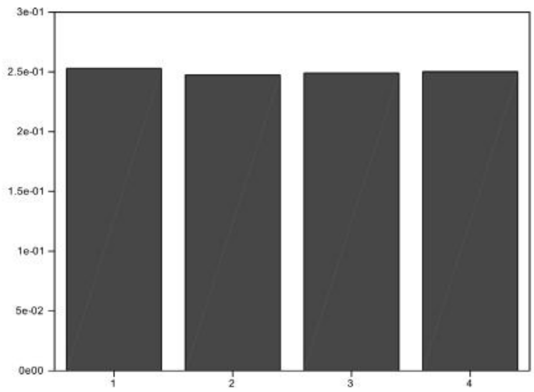
```
--> bar( simulation(1,1,1,100000))
```



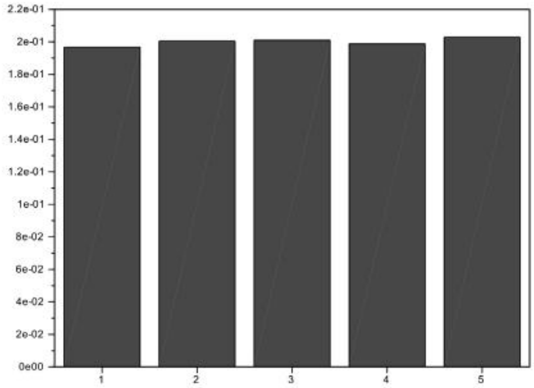

```
--> bar( simulation(1,1,2,100000))
```



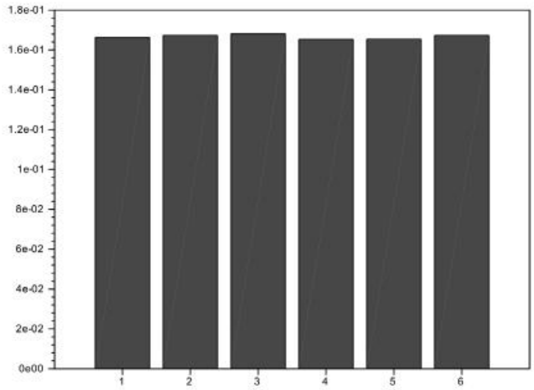

```
--> bar( simulation(1,1,3,100000))
```



```
--> bar( simulation(1,1,4,100000))
```




```
--> bar( simulation(1,1,5,100000))
```



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k, k+1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \; P(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \; P(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a + X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i} \binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
On note F_n la fonction de répartition de Y_n.

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?
   (b) Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$?
8. On fixe $x \in]0, 1[$. Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.
   (a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.
   (b) A l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :
   $$F_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\dbinom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$
   (c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\dbinom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.
   (d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).
9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
10. Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.
11. A l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

ECRICOME VOIE SCIENTIFIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

$\forall x > -1,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\forall x \neq -1,\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.

1–b)

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln(1+\frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\Big) - \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

En effet, $\frac{1}{n}o(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\frac{1}{n}\varepsilon(n) = \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$, donc $\frac{1}{n}o(\frac{1}{n}) = o(\frac{1}{n^2})$.

$$w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$$

1–c)

Au voisinage de $+\infty$, $w_{n+1} - w_n$ est donc négatif. Par équivalence des séries à termes de signe constant, on conclut que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est convergente, puisque la série $\sum -\frac{1}{2n^2}$ est convergente d'après le critère de Riemann.

La suite $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k)$ converge. Or, par "télescopage ", $S_n = w_n - w_1$. Donc $w_n = S_n + w_1$.

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est convergente ; on notera } \gamma \text{ sa limite}}$$

2)

$\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$; la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$. Le tableau de variations est alors le suivant :

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Explication : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(t) = 0$ par croissances comparées. En 0^+ il n'y a aucun problème.

3–a)

- $$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k \\ &= u_{2n+1} + u_{2n+2} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\ &= \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \end{aligned}$$

Pour $n \geq 1,\ 2n+2 > 2n+1 \geq 3 > e$, donc $\varphi(2n+2) < \varphi(2n+1)$ par décroissance de la fonction φ sur $[e, +\infty[$.

$$\forall n \geq 1,\ S_{2n+2} - S_{2n} < 0 : \text{la suite } (S_{2n}) \text{ est décroissante}$$

- $$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k \\ &= u_{2n+2} + u_{2n+3} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} \\ &= \varphi(2n+2) - \varphi(2n+3) \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 1,\ S_{2n+3} - S_{2n+1} > 0 : \text{la suite } (S_{2n+1}) \text{ est croissante}$$

- $S_{2n+2} - S_{2n+1} = \dfrac{\ln(2n+2)}{2n+2} = \varphi(2n+2)$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2n+2} - S_{2n+1}) = 0$.

3–b)

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent vers une même limite, par conséquent la suite (S_n) est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ converge veut dire que la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$$

$|u_n| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ dès que $n \geq 3$.

Par comparaison des séries positives, la série $\sum |u_n|$ est divergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente}}$$

4–a)

$\forall n \geq 3,\ n > e$; sur l'intervalle $[n, n+1]$, la fontion φ est donc décroissante ; par suite $\forall t \in [n, n+1],\ \varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n)$. On intègre cette inégalité entre n et $n+1$; les bornes sont dans l'ordre croissant.

Par suite, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(n)}{n} dt$; on en déduit

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt}$$