BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 281

Conception : ESSEC

OPTION Scientifique

MATHÉMATIQUES

Vendredi 6 mai 2016, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

Sous réserve d'existence, on note $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ et $\psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$.

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ, des expressions des fonctions sin, $\frac{1}{\sin}$ et $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (On parle de développements eulériens).

Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par : $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $[T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$, puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$.

Tournez la page S.V.P.

Partie I : Etude de la fonction φ .

1- Montrer que, pour tout nombre réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x)=\dfrac{2x}{n^2-x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs.
La fonction φ est donc définie sur D.

2- Imparité et périodicité de φ :

a- Justifier que φ est impaire.

b- Vérifier que pour x dans D : $\dfrac{2x}{n^2-x^2}=\dfrac{1}{n-x}-\dfrac{1}{n+x}$.

c- Montrer que pour x dans D : $\varphi(x+1)=\varphi(x)$.

La fonction φ est donc périodique de période 1.

3- Continuité de φ :

a- Justifier pour x dans l'ensemble $D\cup\{0,1\}$ l'existence de :

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right).$$

b- Vérifier que : $\forall x\in D$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}-g(x)$.

c- Soit h un nombre réel de $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$, montrer que : $\forall x\in[0,1]$, $|g(x+h)-g(x)|\leq C|h|$ où

$$C=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(n-1)\left(n-\frac{3}{2}\right)}.$$

d- En déduire que g est continue sur $[0,1]$ puis que φ est continue sur $]0,1[$.

La fonction φ est donc continue sur D.

4- Etude de φ en 0 et en 1 :

a- Montrer que : $\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x}$ et que : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x)-\dfrac{1}{x}\right)=0$.

b- Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II: Etude de l'opérateur *T*

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

T est l'application définie sur E par : $\forall f\in E$, $\forall x\in[0,1]$, $[T(f)](x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)+f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On note, pour tout entier naturel k, e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [0,1]$, $e_k(x)=x^k$ et pour tout entier naturel n, F_n le sous espace vectoriel de E dont une base est $B_n=(e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

5- Vérifier que T est un endomorphisme de E.

6- Etude de T sur F_n :

a- Vérifier que : $\forall f \in F_n$, $T(f)\in F_n$.

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n$, $T_n(f)=T(f)$.

b- Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n.

c- Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?

7- Etude du noyau de l'endomorphisme $(T-2.id_E)$:

a- Montrer que $Ker(T-2.id_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit f un élément de $Ker(T-2.id_E)$. On note $m=\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$ et $M=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0,1]$ tel que $m=f(x_0)$ et x_1 dans $[0,1]$ tel que $M=f(x_1)$.

b- Montrer que : $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)=m$.

c- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)=m$.

d- En déduire que : $m=f(0)$.

e- Faire une étude similaire pour M.

f- Montrer alors que f est constante.

8- Etude de la fonction cot :

Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x)=\pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a- Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique de période 1.

b- Montrer que : $\cot(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{x}$ et que : $\cot(x)-\dfrac{1}{x}\underset{x\to 0}{\sim}-\dfrac{\pi^2}{3}x$.

c- Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

d- Démontrer que, pour tout nombre réel x dans D, on a : $\dfrac{x}{2}\in D$, $\dfrac{x+1}{2}\in D$

et $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cot\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=2\cot(x)$.

9- Calcul de φ :

a- Vérifier que, pour tout nombre réel x dans D, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right)+\varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=2\varphi(x)$.

b- Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

c- Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D,\ \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$.

10- Première application :

a- Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, on pose $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

b- Vérifier que $\left| \delta(x) - \dfrac{x^2}{1 - x^2} \right| \le x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2(n^2 - 1)}$.

c- En déduire que $\lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

d- Déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Partie III: Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout n entier naturel non nul et tout nombre réel x dans $[0,1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et

$\beta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

11- Montrer que, pour tout nombre réel x dans $[0,1[$, la série $\sum_{n \ge 1} \alpha_n(x)$ converge. On note alors

$\beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(x)$.

12- Explicitation de β : on fixe un nombre réel x dans $]0,1[$.

a- Pour N entier naturel non nul, calculer $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \dfrac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

b- Justifier l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \dfrac{1}{t} \right) dt$.

c- Montrer que : $\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \dfrac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \dfrac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \le \sum_{n=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 - 1}$.

d- En déduire que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \dfrac{1}{t} \right) dt$.

e- Montrer alors que, pour tout nombre réel x dans $]0,1[$, $\beta(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right)$.

13- Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel non nul n, on pose $P_n(x)=\pi x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$.

a- Montrer que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est convergente.

Dans la suite, on pose $P(x)=\lim_{n\to+\infty}P_n(x)$ et on note: $P(x)=\pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$.

b- Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0,1[$, $P(x)=\pi x\exp(\beta(x))=\sin(\pi x)$.

c- Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\geq 1}$ est en fait convergente pour tout nombre réel x. On note encore $P(x)=\lim_{n\to+\infty}P_n(x)$

d- Soient n un entier naturel non nul et x un nombre réel dans $]-n,n[$, montrer que $P_n(x+1)=-\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right)P_n(x)$.

e- En déduire que, pour tout nombre réel x : $P(x+1)=-P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

f- Montrer alors que, pour tout nombre réel x, $P(x)=\sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin(\pi x)=\pi x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$.

Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D\cup\{0\}$, on pose $\lambda_n(x)=\int_0^{\pi}\cos(xt)\cos(nt)\,dt$ et $v_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{x}{n^2-x^2}$.

14- Montrer que, pour tout nombre réel x dans $D\cup\{0\}$, la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.

La fonction ψ est donc définie sur $D\cup\{0\}$.

15- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x dans $D\cup\{0\}$, $\lambda_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x\sin(\pi x)}{n^2-x^2}=\sin(\pi x)v_n(x)$. Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

16- Pour tout nombre réel t et tout entier naturel non nul n, on pose $C_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.

a- Vérifier que lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi, p \in \mathbb{Z}$, $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

b- Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec p dans $\mathbb{Z}$.

c- Donner la valeur de $I_n = \int_0^{\pi} C_n(t)\,dt$.

17- Soit F une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi} F(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt\right) = 0.$$

18- Pour x élément de D, on définit la fonction Φ_x sur $[0,\pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xt)-1}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in \left]0,\pi\right] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

a- Montrer que Φ_x est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

b- Vérifier que :

$$\forall t \in [0,\pi],\ \mathrm{C_n}(t)(\cos(xt)-1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt)-1) + \frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{x}}(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

c- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Phi_{\mathrm{x}}(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)dt + I_n.$$

19- Application :

a- Démontrer, à l'aide des questions précédentes que, pour tout x élément de D,

$$\psi(x)\sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

b- En déduire que, pour tout x élément de D, $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} + 2x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

ESSEC VOIE SCIENTIFIQUE

CORRIGE

PARTIE I : étude de la fonction φ

1)

$x \notin \mathbb{Z}$, donc $x \neq 0$. $u_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} 2x\frac{1}{n^2}$.

Par le critère de Riemann, la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge $(2 > 1)$, donc la série de terme général $2x\frac{1}{n^2}$ converge. Par équivalence des séries de signe constant,

$$\boxed{\text{la série } \sum u_n(x) \text{ converge pour tout } x \notin \mathbb{Z}}$$

2–a)

$\forall x \in D,\ -x \in D$; de plus $u_n(-x) = -u_n(x)$ de manière évidente, donc $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est impaire}}$$

2–b)

$\dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{n+x-(n-x)}{(n+x)(x-x)}$: $\boxed{\dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x} = \dfrac{2x}{n^2-x^2}}$

2–c)

$u_n(x+1) = \dfrac{1}{n+(x+1)} - \dfrac{1}{n-(x+1)} = \dfrac{1}{n-1-x} - \dfrac{1}{n+1+x}$. Notons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_n(x)$.

$$S_n(x+1) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-1-x} - \frac{1}{k+1+x}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-1-x} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1+x}$$

dans la première somme, on pose $j = k-1$ et $j = k+1$ dans la seconde

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j-x} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j+x}$$

$$= -\frac{1}{x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j-x} - \frac{1}{n-x} - \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{n+1+x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+1-x} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j-x} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+x}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n-x} + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j-x} - \frac{1}{j+x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n-x} + S_n(x)$$

On prend la limite quand $n \to +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n(x+1) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n-x} + \lim_{n\to+\infty} S_n(x) \iff \\
\sum_{n=1}^{+\infty} u_k(x+1) &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \\
-\varphi(x+1) + \frac{1}{x+1} &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} - \varphi(x) + \frac{1}{x} \quad \text{d'après la définition de } \varphi
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in D,\ \ \varphi(x+1) = \varphi(x)}$$

3–a)

L'existence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}$ a été établie en 1) sur D.

Pour $x = 0$, $\dfrac{2x}{n^2-x^2} = 0$, la série est convergente. Pour $x = 1$ elle l'est également à partir de $n = 2$.

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \text{ existe sur } D \cup \{0,1\}}$$

3–b)

Pour $x \in D$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) \quad \text{d'après 1–b)} \\
&= \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in D,\ \ \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)}$$

3–c)

- $$\begin{aligned}
g(x+h) - g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n+x+h} \right) - \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+h} \right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{h}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{h}{(n+x+h)(n+x)} \right)
\end{aligned}$$

$$g(x+h) - g(x) = h \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{1}{(n+x+h)(n+x)} \right)$$

- $0 \le x \le 1 \iff -1 \le -x \le 0 \iff n-1 \le n-x \le n$.

$-\frac{1}{2} \le h \le \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} \le -h \le \frac{1}{2}$, ce qui implique $n - \frac{3}{2} \le n-x-h \le n + \frac{1}{2}$.

Comme il s'agit d'inégalités entre nombres > 0, on peut les multiplier termes à termes, ce qui donne $0 < (n-1)(n-\frac{3}{2}) \le (n-x)(n-x-h) \le n(n+\frac{1}{2})$, soit, par la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} \le \frac{1}{(n-x)(n-x-h)} \le \frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \qquad \text{(3c1)}$$

Le même raisonnement donnera
$$\frac{1}{(n+1)(n+\frac{3}{2})} \le \frac{1}{(n+x)(n+x+h)} \le \frac{1}{n(n-\frac{1}{2})} \qquad (3c2)$$
Or $n > n-1 > 0$ et $n-\frac{1}{2} > n-\frac{3}{2} > 0$ pour $n \ge 2$ implique $n(n-\frac{1}{2}) > (n-1)(n-\frac{3}{2}) > 0$.
Donc $\dfrac{1}{n(n-\frac{1}{2})} \le \dfrac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$

L'encadrement (3c2) devient
$$\frac{1}{n(n+\frac{1}{2})} \le \frac{1}{(n-x)(n-x-h)} \le \frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \qquad (3c3)$$
Par addition de (3c1) et (3c3), on obtient
$$\frac{1}{(n+x)(n+x+h)} + \frac{1}{(n-x)(n-x-h)} \le 2.\frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$$
La série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ est convergente car positive et équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$. On peut donc sommer
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{1}{(n+x+h)(n+x)}\right) \le \sum_{n=2}^{+\infty} 2.\frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$$
On remarque que $\dfrac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \dfrac{1}{(n+x+h)(n+x)}$ est positif d'après les encadrements précédents, donc
$$\begin{aligned}
|g(x+h)-g(x)| &= \left|h\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{1}{(n+x+h)(n+x)}\right)\right| \\
|g(x+h)-g(x)| &\le |h|\sum_{n=2}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{1}{(n+x+h)(n+x)}\right)\right| \\
|g(x+h)-g(x)| &\le |h|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-x-h)(n-x)} + \frac{1}{(n+x+h)(n+x)}\right) \\
|g(x+h)-g(x)||h|C &\le 2|h|\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}\right)
\end{aligned}$$
$$\boxed{\forall x\in[0,1],\ \forall h \in]-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}[,\ \ |g(x+h)-g(x)| \le |h|C \text{ avec } C = 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}\right)}$$

3–d)

Faisons tendre h vers 0 ; on est donc en droit de le supposer dans $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$.

$\lim_{h\to 0}|h|C = 0$ implique, par l'encadrement précédent, $\lim_{h\to 0}|g(x+h)-g(x)| = 0$. Cela veut dire $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$.

Si l'on pose $t = x+h$, on a
$$\boxed{\forall x\in[0,1],\ \lim_{t\to x} g(t) = g(x)\ ;\ \text{la fonction } g \text{ est continue sur } [0,1]}$$

$\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} + g(x)$ sur D. Donc φ est continue sur $]0,1[$. De plus, comme φ est de période 1, elle est continue sur tous les intervalles de la forme $]k,k+1[$ avec $k\in\mathbb{Z}$.