Problème

1. Soit α et β deux nombres réels positifs, $\beta \neq 0$.
   (a) On pose $n = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{\beta} \right\rfloor$. Montrer que $\alpha - n\beta \in [0, \beta[$.
   (b) Démontrer qu'il existe un unique couple $(n, \rho) \in \mathbb{N} \times [0, \beta[$ tel que $\alpha = n\beta + \rho$.

2. Pour toute la suite, $G \neq \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On note $a = \inf(G \cap]0, +\infty[)$.
   (a) Justifier l'existence de $a \in]0, +\infty[$. Le donner dans le cas $G = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{D}$ et enfin $G = \mathbb{Z}$ (justifier...).
   (b) Dans le cas où $a > 0$, démontrer que l'on $G = \{na/n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z}$.
   (c) Dans le cas où $a = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. (*Indication : pour tous réels* $a < b$, *choisir* $g \in G$ *tel que* $0 < g < b - a$... *on pourra faire un dessin !*).

3. On note toujours exp la fonction exponentielle réelle.
   (a) Démontrer que $\exp(G)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.
   (b) Réciproquement, démontrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$, alors $\overset{-1}{\exp}(H)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   (c) En déduire la description des sous-groupes de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.

   Pour toute la suite, si x et y sont deux réels, on note $\mathbb{Z}[x, y] = \{nx + my/(n, m) \in \mathbb{Z}^2\}$
4. Justifier que $\mathbb{Z}[x, y]$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
5. On suppose dans cette question que le quotient $\dfrac{x}{y} = \dfrac{p}{q}$ est rationnel avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ où p et q sont premiers entre eux.
   (a) Si $a = \dfrac{x}{p} = \dfrac{y}{q}$, montrer que $\mathbb{Z}[x, y] \subset a\mathbb{Z}$.
   (b) En utilisant l'identité de Bezout, montrer qu'on a bien $\mathbb{Z}[x, y] = a\mathbb{Z}$.
   (c) Application : identifier le sous-groupe $\mathbb{Z}\left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}\right]$.
6. On suppose que $\dfrac{x}{y}$ est irrationnel. Montrer que $\mathbb{Z}[x, y]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est à la fois T et T' périodique.
   (a) Montrer que si $\dfrac{T}{T'}$ est rationnel, alors il existe $P \in \mathbb{R}^*$ (à déterminer) pour lequel la condition équivaut au fait que f soit P-périodique.
   (b) Dans le cas contraire, montrer que f est constante.
8. Soit α un irrationnel. Montrer que l'ensemble $\{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor / m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$. On pourra considérer le sous-groupe $\mathbb{Z}[\alpha, -1]$.
9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique.
   (a) Montrer que si $\dfrac{\alpha}{T}$ est irrationnel, alors l'ensemble $\{f(m\alpha)/m \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.
   (b) Si r est rationnel, que dire des suites $(\cos(rn))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(rn))_{n\in\mathbb{N}}$

Indications

1. (a) La partie entière est définie par une inégalité qu'il faut utiliser ici.
   (b) La question précédente donne un couple. Pour l'unicité, si ρ et ρ_1 conviennent, utiliser le fait que $\rho - \rho_1 \in]-\beta, \beta[$.

2. (a) Une borne inférieure existe si et seulement si la partie est minorée. Etudier alors $G \cap]0, +\infty[$ dans les exemples proposés.
   (b) On montre facilement que $a\mathbb{Z} \subset G$. Pour la réciproque, prendre un élément $x \in G$ et en faire la division euclidienne réelle par a.
   (c) Si $]a, b[\neq \emptyset$, alors $b - a > 0$ et il doit exister $g < b - a$ et $g \in G$. On devra essayer d'intercaler un multiple de G dans l'intervalle $]a, b[$.

3. (a) Vérification facile avec la caractérisation des sous-groupes multiplicatifs.
   (b) Puisque exp est bijective, on peut exprimer facilement $\overset{-1}{\exp}(H)$.
   (c) On utilisera la description des sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ pour avoir celle des sous-groupes de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.

4. Vérification facile avec la caractérisation des sous-groupes additifs.

5. (a) Vérification facile avec la forme des éléments de $\mathbb{Z}[x, y]$.
   (b) Commencer par montrer que $a \in \mathbb{Z}[x, y]$. Le reste vient ensuite.
   (c) On doit commencer par identifier a ici.

6. Par disjonction de cas, on peut montrer que $\mathbb{Z}[x, y]$ ne peut pas s'écrire sous la forme $a\mathbb{Z}$.

7. (a) Commencer par montrer que f est constante sur le sous-groupe $\mathbb{Z}[T, T']$. Dans ce cas, on a l'existence de P tel que $\mathbb{Z}[T, T'] = P\mathbb{Z}$.Montrer que si $\dfrac{T}{T'}$ est rationnel, alors il existe $P \in \mathbb{R}^*$ (à déterminer) tel que f est P-périodique.
   (b) f est constante sur le sous-groupe $\mathbb{Z}[T, T']$, qui est ici dense. Utiliser ensuite la continuité de f.

8. Si $]a, b[\subset [0, 1]$ est non vide, il contient un élément de $\mathbb{Z}[\alpha, -1]$. Utiliser cet élément pour montrer qu'il est de la forme de l'ensemble considéré ici.

9. (a) Utiliser le résultat précédent.
   (b) Simple application aux fonctions cos et sin.