Dans ce recueil, on présente quatre problèmes portant sur le développement asymptotique de suites numériques définies implicitement.

Notamment, il s'agit d'étudier (x_n) telle que le terme x_n soit l'unique solution d'une équation $f_n(x) = 0$ sur un intervalle I_n.

Le dernier problème, voulant faire la synthèse des techniques utilisées, est volontairement posé de manière ouverte.

Problème 1

On considère ici l'équation (E) : $\tan(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Réaliser l'étude complète de $\varphi : x \mapsto \tan(x) - x$ sur l'intervalle $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
   (b) En déduire que (E) admet une unique solution dans I_n. On note x_n cette solution.
   (c) Démontrer que l'on a $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

2. *Un équivalent de x_n à l'infini.*
   (a) Avec un encadrement de x_n, démontrer que $x_n \sim n\pi$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - n\pi = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On écrit donc } (R) : x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha_n \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

3. *Un développement asymptotique de x_n.*
   (a) Justifier que pour tout $y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\tan(y)}$.
   (b) Donner un équivalent simple de tan à l'origine puis utilisant (E) et (R), démontrer que $\alpha_n \sim -\frac{1}{n\pi}$.

$$\text{On écrit donc } (R') : x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

4. *Un développement asymptotique de x_n encore plus précis.*
   (a) Rappeler le développement limité de tan à l'ordre 3 à l'origine, puis montrer que $\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x)$.
   (b) En utilisant alors (E) et (R'), démontrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Problème 2

On note pour tout entier $n \geqslant 3$ la fonction $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 2[$ pour tout $n \geqslant 3$. On notera a_n cette solution.
2. (a) En comparant $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$, montrer que (a_n) est décroissante.
   (b) Montrer que la suite (a_n) tend vers 1.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ en 0.
4. On écrit $a_n = 1 + u_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n}$. On écrit alors $a_n = 1 + \dfrac{A}{n} + \dfrac{v_n}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Déterminer un équivalent de v_n et conclure sur un développement asymptotique à trois termes de a_n.

Problème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$.

1. Montrer que f_n s'annule une seule fois sur $]0, 1[$. On note x_n l'abscisse d'annulation.
2. En étudiant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, montrer que (x_n) est décroissante et étudier sa convergence.
3. Déterminer un équivalent simple de x_n pour $n \to +\infty$ puis un développement asymptotique à deux termes.

Problème 4

Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

Montrer l'existence et l'unicité de deux suites (x_n) et (y_n) définies par $f(x) = n$ respectivement sur $[1, +\infty[$ et $]0, 1]$.

Etudier la convergence des suites (x_n) et (y_n) puis des développements asymptotiques (choisissez vous-même le nombre de termes de ce développement, mais de voyez pas trop gros au début !).

Indications sur les problèmes

Indications sur le problème 1

1. (a) La dérivée est simple à obtenir. Ne pas oublier les limites aux bornes (dictées par tan).

   (b) Utiliser le théorème de la bijection.

   (c) En prenant garde à l'intervalle sur lequel on travaille, étudier les tangentes des deux membres.

2. (a) Utiliser l'intervalle I_n dans lequel se trouve x_n.

   (b) On trouve la première limite par l'équivalent. Pour $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - n\pi = \frac{\pi}{2}$, utiliser une autre expression de $x_n - n\pi$.

3. (a) Utiliser les relations trigonométriques pour $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = ...$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = ...$.

   (b) Utiliser dans un premier temps un développement limité à l'ordre 1 de tan. Puisque $\alpha_n \to 0$, on pourra utiliser un équivalent de $\tan(\alpha_n)$ pour $n \to +\infty$.

4. (a) Avec le développement de tan à l'ordre 3, factoriser le dénominateur par x pour avoir une expression $\frac{1}{1-X}$ où $X \to 0$.

   (b) Développer l'expression issue de (R') dans (E) en l'effectuant pour une suite tendant vers 0. On doit pourvoir isoler ϵ_n.

Indications sur le problème 2

On note pour tout entier $n \geqslant 3$ la fonction $f_n : x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Etudier l'application f_n sur $]0, 2[$.

2. (a) On pourra étudier la différence des deux expressions avec $f_n(a_n) = 0$. On devra alors utiliser le sens de variation de la fonction f_n pour pouvoir avoir $a_{n-1} \leqslant a_n$.

   (b) S'assurer déjà que la suite (a_n) est convergente. En supposant que $a_n \to l \neq 1$, obtenir une contradiction.

3. Développer chaque facteur au bon ordre puis en faire le produit.

4. (a) Donner un équivalent de $\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}$ par ce qui précède puis se ramener à u_n.

   (b) Pour l'équivalent de v_n, on utilisera le développement limité de la fonction φ.