BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par *Id* l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2) a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3) Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4) a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.

5) a) Expliquer pourquoi l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$$

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5a) reste valable pour $n = -1$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n,+\infty[,\ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt$.

1) Étude de f_n .

a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n,+\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n,+\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .

b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n,+\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2) Étude de la suite (u_n).

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-\sqrt{u_n}} \le u_n - n \le e^{-\sqrt{n}}$.

3) a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
n = 0
while -------
n = ------
end
disp(n)
```

b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.

4) On pose $v_n = u_n - n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à –1, on a : $\sqrt{1+x} \le 1 + \dfrac{x}{2}$.

c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \ge e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V , telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.

On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$P(Z=1) = p \text{ et } P(Z=-1) = 1-p$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) \text{ si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note F_X , F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V .

1) Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

2) a) Établir, grâce au système complet d'événements $\big((Z=1),(Z=-1)\big)$, que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=pF_U(x)+(1-p)F_V(x)$$

b) Vérifier que $X(\Omega)=[-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x<-3,\ -3\le x\le -1,\ -1\le x\le 1,\ 1\le x\le 3 \text{ et } x>3$$

c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

d) Établir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.

3) On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

a) Vérifier que l'on a : $X=U\dfrac{1+Z}{2}+V\dfrac{1-Z}{2}$.

b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.

c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

4) a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

b) On rappelle que `grand(1,1,'unf',a,b)` et `grand(1,1,'bin',1,p)` sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.

Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Problème

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}=-\ln(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt$.

c) Établir par encadrement que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\,dt=0$.

d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln(1-x)$.

2) Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall q\ge m,\ \sum_{k=m}^{q}\binom{k}{m}=\binom{q+1}{m+1}$$

3) Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :

$$P(S_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}P\big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\big)$$

b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k\in[\![n,+\infty[\![,\ P(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

c) En déduire, pour tout x de]0, 1[et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n}=\frac{1}{x^n}$$

d) On rappelle que la commande `grand(1,n,'geom',p)` permet à `Scilab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1 : ')
S = ------
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q=1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u_k=-\frac{q^k}{k\ln p}$$

1) a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k=1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=u_k$$

2) a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X)=\dfrac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}$.

3) Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

a) Montrer que $Y(\Omega)=\mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :

$$P(Y=0)=1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}$$

b) Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\binom{k}{n}}{k}=\dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $P(Y=n)=-\dfrac{p^nq^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}$.

En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :

$$P(Y=n)=-\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}$$

c) Vérifier que l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k)=1$.

d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et q.

e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :

$$V(Y)=-\frac{q(q+(1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EDHEC VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4(A - I).$$

$A^2 = 4A - 4I \iff A^2 - 4A + 4I = (0).$

Le polynôme $Q(X) = X^2 - 4X + 4$ est annulateur de A

2–a)

On remarque que $Q(X) = (X-2)^2$.

D'après le cours, les valeurs propres éventuelles de A (donc de f) sont racines de $Q(X)$: elles vérifient donc l'équation $Q(\lambda) = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0$.

A admet au plus une valeur propre : c'est $\lambda = 2$.

Vérifions que 2 est effectivement une valeur propre de A en vérifiant que la matrice $A - 2I$ n'est pas inversible.

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Les trois lignes (ou les trois colonnes) sont proportionnelles, la matrice n'est donc pas inversible.

La matrice A admet une unique valeur propre : $\lambda = 2$

2–b)

Raisonnons par l'absurde (ce raisonnement est maintenant classique).

Si A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale sur la diagonale de laquelle il y a la valeur 2 ; cette matrice est $2I$. Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible telle que $A = P(2I)P^{-1} = 2PIP^{-1} = 2I$. L'égalité $A = 2I$ est fausse, donc

La matrice A n'est pas diagonalisable

3)

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $E(2, f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur 2.

$$u \in E(2,f) \iff f(u) = 2u \iff (f - 2\,\mathrm{Id})(u) = 0 \iff (A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0).$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Cette dernière égalité équivaut au système $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ 2x-2y+2z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \end{cases} \iff x-y+z=0.$

$$\begin{aligned} E(2,f) &= \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x-y+z=0\} = \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ y=x+z\} \\ &= \{u=(x,x+z,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\} = \{u=x(1,1,0)+z(0,1,1),\ (x,z)\in\mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(2,f)=\text{vect}((1,1,0),(0,1,1))}$$

Posons $u_1=(1,1,0)$ et $u_2=(0,1,1)$; la famille (u_1,u_2) est libre car les vecteurs ne sont pas proportionnels ; il en résulte que (u_1,u_2) est une base de $E(2,f)$.

$$\boxed{E(2,f)=\text{vect}(u_1,u_2) \text{ où } (u_1,u_2) \text{ est une base de } E(2,f)}$$

4–a)

∗ Première idée. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $au_1+bu_2+cu_3=(0,0,0)$. Cette égalité équivaut à

$\begin{cases} a+c &= 0 \\ a+b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$ $L_2 \longleftarrow L_2-L_1$; $\begin{cases} a+c &= 0 \\ b &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$ On a clairement $a=b=c=0$.

La famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

∗ Deuxième idée. Soit P la matrice des vecteurs u_1,u_2,u_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix} L_2\longleftarrow L_2-L_1 \\ \Longrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_3\longleftarrow L_3-L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, aucun terme diagonal n'est nul, cette matrice est inversible. Conclusion : (u_1,u_2,u_3) est une famille libre.

$$\boxed{(u_1,u_2,u_3) \text{ est une famille libre de 3 vecteurs de } \mathbb{R}^3, \text{ c'est donc une base de } \mathbb{R}^3}$$

4–b)

Par définition de u_1 et u_2, $f(u_1)=2u_1$ et $f(u_2)=2u_2$.

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \text{ donc } f(u_3)=u_1+u_2+2u_3.$$

$$\boxed{\text{Par définition d'une matrice d'endomorphisme, } T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$$

4–c)

$T=2I+N$ avec $N=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Il est clair que $2I$ et N commutent ; on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton.

Un calcul facile donne $N^2=(0)$.

$\forall k\geq 2,\ \exists p\geq 0 \ / \ k=2+p \ ; \ N^k=N^{2+p}=N^2N^p=(0)N^p=(0)$.

Pour $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} T^n &= (2I+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k(2I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}N^0(2I)^n+\binom{n}{1}N(2I)^{n-1}=2^nI^n+n2^{n-1}NI^{n-1} \\ &= 2^nI+n2^{n-1}N=2^nI+n2^{n-1}(T-2I) \end{aligned}$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.