Problème

Autour de la fonction tangente

On se propose dans un premier temps d'aborder de plusieurs façons le développement en série entière de tan. On donne en deuxième partie une application probabiliste. Enfin, la dernière partie fera office de synthèse en parlant de la fonction th où l'on pourra toucher du doigt les fonctions de variables complexes.

Partie I : Le développement en série entière de tangente

1. (a) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$. En écrivant $f(x)\cos(x) = 1$, déterminer l'éventuel développement en série entière $\sum a_n x^n$ de f en donnant une relation de récurrence sur les coefficients a_n.
   (b) En déterminant une majoration de a_n pour tout n, montrer que f est bien développable en série entière au moins sur $]-1,1[$.
   (c) En déduire enfin que tan est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$.

2. Dans cette question, on cherche à retrouver l'existence du précédent développement en série entière d'une autre façon (on ne suppose donc pas connu son existence ici).
   (a) Montrer que tan est l'unique fonction solution sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ du problème $(P) : \left\{ \begin{array}{l} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$.
   (b) Si $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est une solution de (P) développable en série entière au voisinage de 0, déterminer une relation de récurrence vérifier par la suite (b_n).
   (c) En majorant la suite (b_n), retrouver que tan est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$.
   (d) Quelle relation y a-t-il entre les suites (a_n) (cf. question 1.) et (b_n) ?
   (e) Calculer à l'aide de ce qui précède le développement limité de tan à l'ordre 5 en 0.
   (f) Ecrire une procédure Python qui permet de calculer la liste des n premiers coefficients $b_0, ...b_{n-1}$. Retrouver des valeurs antérieures.

3. On se propose d'améliorer le domaine sur lequel tan est développable en série entière.
   (a) Montrer que toutes les dérivées successives de tan sont positives sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (b) A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que la série de Taylor $\sum \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\tan^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$.
En effectuant le changement de variable $t = xu$, montrer que pour tout x on a $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$.

(d) En déduire que tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie II : Une fonction génératrice

On définit sur $]-2,2[$ la fonction g par $\forall x \in]-2,2[, g(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

4. Montrer que f est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ (*on ne demande pas la loi de* X).
5. Calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$.
6. Que dire de $P(X = 2k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$?
7. Calculer (si elles existent) $E(X)$ et $V(X)$.

Partie III : une adaptation à th

8. En s'inspirant de méthodes exposées précédemment, étudier la développabilité de th en série entière. Le cas échéant, on donnera le rayon de convergence.
Pour cela, on étudiera les fonctions exprimées en fonction de $z \in \mathbb{C}$:

$$c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad t(z) = \frac{s(z)}{c(z)}$$

Indications

Partie I : Le développement en série entière de tangente

1. (a) Puisque $f(x)\cos(x) = 1$, il faut par analyse déterminer une relation de récurrence sur les coefficients (a_n) connaissant ceux de cos. Le moyen pour l'obtenir est d'écrire le membre de gauche comme produit de Cauchy de séries entières.

   (b) Il n'est pas difficile de montrer que l'on a $|a_n| \leqslant 1$. Pour cela, procéder par récurrence. Le rayon de convergence peut alors à l'inverse être minoré.

   (c) Utiliser à présent que $\tan = f \cdot \sin$ puis obtenir le développement de tan par produit de Cauchy, du moins justifier son existence (il est inutile de la calculer pour l'instant).

2. (a) On peut facilement vérifier que tan est solution de (P).
   Pour la réciproque, il faut intégrer la relation $\dfrac{y'}{1+y^2} = 1$. On prendra garde aux intervalles et à la condition initiale.

   (b) Si $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on connait $y'(x)$. En l'introduisant dans l'équation $y' = 1+y^2$, on peut trouver un relation de récurrence (développer y^2 par produit de Cauchy encore une fois).

   (c) On peut obtenir facilement $|b_n| \leqslant 1$ (utiliser une récurrence).

   (d) On pourra utiliser l'unicité du développement en série entière, obtenu de deux façons différentes par la relation $y' = 1 + y^2$.

   (e) On aura le choix entre deux méthodes déjà données pour calculer les coefficients.

   (f) On pourra utiliser la relation de récurrence déjà prouvée. Il faudra faire attention aux indices et faire augmenter la liste à chaque tour de boucle.

3. (a) Procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'ordre de dérivation. On pourra en particulier montrer que cette dérivée n-ième peut s'exprimer de façon polynomiale en $\tan(x)$ (que dire alors des coefficients du polynôme ?). Cette propriété pourra servir dans la suite.

   (b) La série $\sum \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est à termes positifs. Trouver un majorant fixe dans la formule de Taylor des sommes partielles de la série. Regarder en particulier le reste de Taylor.

   (c) Pour majorer le reste, il faut penser au fait que les dérivées successives de tan sont polynomiales en $\tan(x)$. La factorielle impose la limite.