Séries à termes quelconques

Exercice 1

Soit (a_n) une suite à **termes positifs**, **décroissante** et de **limite nulle** et pour tout entier n on pose $u_n = (-1)^n a_n$ (**suite alternée**). On note également (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$

1. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Sous les hypothèses données, le résultat de convergence de série démontré s'appelle le ***théorème spécial de convergence des séries alternées***

3. Si (R_n) désigne la suite des restes de la série $\sum u_n$, montrer en outre que pour tout entier n on a $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Exercice 2

A l'aide du résultat de l'exercice 1, déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\text{c)} \sum_{n\geqslant 1} \left[\cos\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) + (-1)^{n+1}\right] \qquad \text{d)} \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$$

Exercice 3

1. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ et déterminer la somme de la série s.
2. A l'aide de l'exercice 1, déterminer une valeur approchée a de s à 10^{-9} près.
3. Avec quelle précision le nombre $\dfrac{1}{a}$ approche-t-il $\dfrac{1}{s}$?

Exercice 4

Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$ est convergente et montrer que sa somme est un réel négatif.

Exercice 5

Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - e^{\frac{1}{k}}\right)$.

Exercice 6

Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) S_k + S_n u_n$
2. On suppose que (u_n) est décroissante et de limite nulle et que la suite (S_n) est bornée. Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
3. Retrouver le *théorème spécial de convergence des séries alternées.*
4. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite de série absolument convergente. Montrer que pour toute bijection φ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite telle que $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge. Pour tout entier n, on pose $u_n^+ = \dfrac{u_n + |u_n|}{2}$ et $u_n^- = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$.

1. Montrer que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont divergentes. Que dire de leurs sommes partielles ?

   $$\text{On pose } E_1 = \{n \in \mathbb{N} / u_n^- = 0\} \text{ et } E_2 = \mathbb{N} \setminus E_1$$

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On va montrer l'existence d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \alpha$ (*Théorème de Riemann*). Pour cela, on définit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante en posant $\varphi(0) = 0$ et si $\varphi(0), ..., \varphi(n)$ sont construits, on pose

   - Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} < \alpha$, on pose $\varphi(n+1) = \min(E_1 \setminus \{\varphi(0), ..., \varphi(n)\})$.
   - Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \geqslant \alpha$, on pose $\varphi(n+1) = \min(E_2 \setminus \{\varphi(0), ..., \varphi(n)\})$.
2. Montrer que φ est bien définie et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.
3. En utilisant le fait que $u_n \to 0$ pour $n \to +\infty$, montrer que les sommes partielles de $\sum u_{\varphi(n)}$ tendent vers α et conclure.

Indications sur les exercices

Indications sur l'exercice 1

1. Deux suites v et w sont dites adjacentes si v est croissante, w décroissante, que $v \leqslant w$ et enfin que $w - v$ soit de limite nulle. Il suffit de trouver en les étudiant laquelle des deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) joue le rôle de v et l'autre de w.
2. Utiliser le théorème des suites adjacentes et conclure sur la nature de la suite (S_n).
3. Si l désigne la somme de la série, justifier l'inégalité $|S_n - l| \leqslant |S_{n+1} - S_n|$ pour conclure. Cela doit provenir du fait que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes (*il est recommandé de faire un schéma représentant le positionnement des termes de la suite* (S_n) *vis à vis de* l).

Indications sur l'exercice 2

a) Il s'agit d'une série alternée dont le terme général vérifie les hypothèses du théorème spécial de convergence des séries alternées.

b) Il faut procéder à un développement asymptotique du terme général et discuter de la convergence ou de la divergence de chaque terme en tant que série.

c) On rappelle que pour tout x réel et n entier on a $\cos(x + \pi n) = (-1)^n \cos(x)$. Il faut ensuite procéder à un développement asymptotique.

d) Encore une fois il faut procéder à un développement asymptotique. Contrairement aux apparences éventuelles, on ne peut pas appliquer directement le théorème spécial de convergence des séries alternées.

Indications sur l'exercice 3

1. On peut penser au théorème spécial de convergence des séries alternées pour la convergence. Pour avoir la somme de la série, il faut reconnaître une série usuelle.
2. Un résultat important pour les séries alternées est la majoration de leurs restes pour la précision. **Rappel :** Lorsque l'on cherche une valeur approchée d'une suite, on doit justifier le choix des u_n (donc des rangs n) donnant la valeur approchée. On ne calcule pas des valeurs à tout va !
3. Si on a $a - 10^{-9} \leqslant s \leqslant a + 10^{-9}$, on peut avoir un encadrement de $\dfrac{1}{s}$. Il faut aboutir à des inégalité du type $a' - \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{s} \leqslant a' + \varepsilon$ (a' la valeur approchée, ε la précision).

Indications sur l'exercice 4

Pour la somme de la série, calculer les premiers termes de la suite des sommes partielles et majorer le reste en valeur absolue pour voir l'écart avec la somme de la série

Indications sur l'exercice 5

Il s'agit d'une série alternée. Il faut alors étudier le terme $|u_n| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{k}} - 1\right)$

Indications sur l'exercice 6

1. Ecrire $v_n = S_n - S_{n-1}$ avec pour convention $S_0 = 0$ pour passer du membre de gauche à celui de droite. Pour faire l'inverse, développer les sommes partielles et constater que l'on retrouve ce qui est donné.

2. Sous les hypothèses données, étudier l'absolue convergence de la série $\sum S_n(u_n - u_{n+1})$.

3. Poser dans ce cas $v_n = (-1)^n$ pour conclure.

4. Décomposer le terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}, (\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ en produit de deux suites pouvant vérifier les hypothèses précédemment émises selon les valeurs de θ et α.

Indications sur l'exercice 7

Pour prouver l'absolue convergence, il faut majorer les sommes partielles de $\sum \left|u_{\varphi(n)}\right|$ à l'aide de la somme de la série $\sum |u_n|$.
Pour l'égalité des sommes de séries, il faut comparer les sommes partielles des séries et prouver que la différence tend vers 0 selon un certain indice.

Indications sur l'exercice 8

1. On peut ré exprimer facilement $|u_n|$ en fonction de u_n, u_n^- ou u_n^+. Si l'une des séries $\sum u_n^-$ ou $\sum u_n^+$ convergeait, obtenir une contradiction.
2. Montrer successivement que les images sont bien définies (il faut pouvoir prendre des éléments dans E_1 et E_2 à toute étape), que φ est injective puis enfin qu'elle est surjective en supposant le contraire. On aboutira à une contradiction avec la nature des séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$.
3. Puisque $u_n \to 0$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence de n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n| \leqslant \varepsilon$. Il faut alors trouver un rang N tel que si $n \geqslant N$ on ait $|S_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ en distinguant les cas sur la position de S_n vis à vis de α.