

## Séries à termes positifs

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs et soit pour tout entier  $n : v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

### Exercice 2

Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs et soit pour tout entier  $n : v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

### Exercice 3

Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs et décroissante telle que  $\sum u_n$  converge.

1. A l'aide des restes de la série, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$ .
2. Déterminer alors la nature de la série  $\sum nu_n^2$ .

### Exercice 4

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n} & \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2(n)} & \text{c) } \sum_{n \geq 0} \left( \frac{n+a}{n+b} \right)^{n^2}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 & \text{d) } \sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \\
 \text{e) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}} & \text{f) } \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{(2n)!} & \text{g) } \sum_{n \geq 0} \sin(2 \arctan(n)) & \text{h) } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + n}
 \end{array}$$

### Exercice 5

On considère les séries de terme général  $\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$  pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (séries de Bertrand)

1. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$  pour  $\alpha > 1$  et  $\alpha < 1$ .
2. Pour  $\alpha = 1$ , déterminer selon  $\beta$  la nature de  $\sum u_n$  en procédant à une comparaison série intégrale.

### Exercice 6

Soit  $\alpha > 1$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  (On pensera à faire une comparaison série intégrale pour avoir un équivalent).

**Exercice 7**

Sans utiliser la formule de Stirling, montrer la convergence de la suite  $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$  (on pourra étudier la suite  $(\ln(u_n))$ ).

**Exercice 8**

Soit  $\alpha > 0$ . On pose alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k))^\alpha$ .

1. Montrer que  $u_n \sim n(\ln(n))^\alpha$ .
2. Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , étudier la série  $\sum u_n^{-\beta}$

**Exercice 9**

Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs telle que  $\sqrt[n]{u_n}$  tend vers  $l \in [0, +\infty]$ .

1. On suppose que  $l < 1$  et on se donne alors  $q \in ]l, 1[$ . Montrer que  $u_n = O(q^n)$  et en déduire la nature de  $\sum u_n$ .
2. On suppose que  $l > 1$ . Montrer que si  $l > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
3. Montrer que la divergence grossière persiste si  $l = 1^+$  (limite obtenue par valeurs supérieures).
4. Montrer que si  $l = 1$ , on ne peut pas conclure sur  $\sum u_n$  en toute généralité.

La distinction de cas ainsi obtenue est connue sous le nom de *règle de Cauchy*.

**Exercice 10**

Soit  $(u_n)$  une suite strictement croissante à termes strictement positifs et soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$$

1. Justifier que  $(u_n)$  admet une limite  $l \in [0, +\infty]$ .
2. Montrer que si  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $\sum v_n$  converge.
3. Montrer que si  $l = +\infty$  alors  $\sum v_n$  diverge par une comparaison à  $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ .

**Exercice 11**

Soit  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  une bijection. Etudier la nature de la série  $\sum \frac{1}{n\varphi(n)}$ .

## Indications sur les exercices

### Indications sur l'exercice 1

- Si  $\sum u_n$  converge, on peut exprimer les sommes partielles de  $\sum v_n$  à l'aide de celles de  $\sum u_n$  pour prouver leur convergence.
- Si  $\sum v_n$  converge, on peut majorer le terme général  $u_n$ .

### Indications sur l'exercice 2

- Si  $\sum u_n$  converge, on peut trouver un équivalent de  $v_n$  pour conclure.
- Si  $\sum v_n$  converge, on peut procéder de façon identique (il faut ré-exprimer  $u_n$ ).

### Indications sur l'exercice 3

1. Procéder à un encadrement de  $nu_n$  par des restes de la série. Utiliser la décroissance de  $(u_n)$ .
2. On peut comparer le terme général  $nu_n^2$  à  $u_n$ .

### Indications sur l'exercice 4

- a) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
- b) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
- c) Effectuer un développement asymptotique afin de trouver un équivalent simple du terme général.
- d) Trouver un équivalent simple du terme général.
- e) Comparer le terme général à celui d'une série de Riemann.
- f) Trouver un équivalent simple à l'aide de la formule de Stirling.
- g) On rappelle (et on démontrera) que  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x > 0$ .
- h) Un simple calcul du dénominateur mène au résultat.

### Indications sur l'exercice 5

1. Des comparaisons du terme général à celui d'une série de Riemann suffit ici.
2. Etudier la fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t)^\beta)}$  pour faire comparaison série intégrale.

### Indications sur l'exercice 6

La comparaison série intégrale doit donner un équivalent simple de  $u_n$ . On peut alors conclure.

### Indications sur l'exercice 7

Pour étudier la suite  $(\ln(u_n))$ , on peut étudier la série  $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$  en utilisant un développement asymptotique de son terme général.



## Indications

**Indications sur l'exercice 8**

1. Il faut procéder à une comparaison série intégrale. Une fois qu'on a prouvé que  $u_n$  était équivalent à une intégrale en  $n$ , on peut trouver un équivalent de cette dernière en procédant à une intégration par partie.
2. Il suffit d'utiliser l'équivalent précédent pour conclure. On aura recours aux *séries de Bertrand* pour pouvoir conclure.

**Indications sur l'exercice 9**

1. Exprimer limite  $l$  en interprétant que le terme est inférieur à  $q$  à partir d'un certain rang.
2. Etudier dans ce cas le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
3. Etudier encore le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
4. Trouver deux exemples de suites menant à  $l = 1$  avec l'une dont la série diverge et l'autre dont la série converge.

**Indications sur l'exercice 10**

1. C'est un résultat classique sur les suites monotones dont il faut se servir...
2. On trouve un équivalent simple de  $v_n$  qui permet de conclure.
3. Pour obtenir la comparaison souhaitée, il faut comparer  $v_n$  à une intégrale bien choisie.

**Indications sur l'exercice 11**

Il faut séparer le terme général de la série en le majorant à l'aide de la majoration classique (que l'on démontrera)  $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ . On peut également faire appel à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.