Problème

Sur les règles de d'Alembert et de Raabe-Duhamel

Le problème s'intéresse à deux règles permettant de déterminer la nature d'une série numérique. La règle de d'Alembert est au programme de deuxième année et ce problème en permet une approche. La règle de Raabe-Duhamel s'intéresse à la nature de la série dans certains cas indéterminés pour d'Alembert. Enfin, on verra que certains cas restent indéterminés par la règle de Raabe-Duhamel et on en donnera une version améliorée dans la dernière partie du problème. On donnera tout au long du problème des exemples permettant d'illustrer de tels résultats.

Pour tout le problème, (u_n) désigne une suite à termes strictement positifs.

Partie I : la règle de d'Alembert

Dans cette partie, on suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $l \in [0, +\infty]$. La *règle de d'Alembert* a pour but de donner la nature de la série $\sum u_n$ selon la valeur de l.

1. Montrer que si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Montrer que si $l = 1$ et que cette limite est atteinte par valeurs supérieures, alors $\sum u_n$ est encore grossièrement divergente.
3. On suppose dans cette question que $l < 1$.
   (a) Soit (v_n) une autre suite à termes strictement positifs telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n = O(v_n)$.
   (*Il s'agit de la règle de comparaison logarithmique*)
   (b) Montrer que pour tout $q \in]l, 1[$ on a $u_n = O(q^n)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.
4. En considérant les séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$, montrer que l'on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$ lorsque $l = 1$ (sauf si elle était atteinte par valeurs supérieures).
5. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.
6. Dans cette question, on considère la suite (a_n) définie par $a_0 > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$$

   (a) Etudier le signe et la monotonie de (a_n).
   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
   (c) Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.

Partie II : la règle de Raabe-Duhamel

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un réel λ tel que l'on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La *règle de Raabe-Duhamel* a pour but de donner la nature de $\sum u_n$ selon λ.

7. Si $\lambda < 0$, donner la nature de $\sum u_n$ à l'aide de la règle de d'Alembert.

   Pour toute la suite, on suppose que $\lambda \geqslant 0$ (où la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure) et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

8. Déterminer $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\mu}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
9. On suppose ici que $\lambda > 1$. Montrer que pour tout $\beta \in]1, \lambda[$ on a $u_n = O(v_n)$ et conclure sur la nature de $\sum u_n$.
10. Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$.
11. En considérant $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n \ln(n)^2}$ montrer que l'on ne peut pas conclure sur la nature de $\sum u_n$ lorsque $\lambda = 1$.
12. Soit $w_n = \sqrt{(n-1)!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de $\sum w_n$.

Partie III : la règle de Raabe-Duhamel "affinée"

Dans cette partie, on suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + r_n$ où (r_n) est telle que $\sum r_n$ est absolument convergente. On pose alors pour tout n entier $w_n = n^\lambda u_n$.

13. (a) Justifier l'inégalité pour tous a et b réels : $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

    (b) En déduire que (w_n) converge dans $\mathbb{R}$ en étudiant $\sum(\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n))$.
14. En déduire un équivalent de u_n puis une condition nécessaire et suffisante sur λ pour avoir la convergence de $\sum u_n$.
15. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \dfrac{b_n}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$. Déterminer la nature de la série $\sum b_n$.

Indications

Partie I : la règle de d'Alembert

1. Si $l > 1$, montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ à partir d'un certain rang puis conclure avec la monotonie de (u_n).

2. De la même façon, conclure à l'aide de la monotonie de (u_n).

3. (a) Par définition de la relation de domination, il faut montrer que le quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ est borné. On peut étudier la monotonie de cette suite quotient.

   (b) Poser $v_n = q^n$ et utiliser la question précédente.

4. Donner la nature de chacun des séries et montrer qu'on est pourtant dans le même cas du quotient vis à vis de l'hypothèse que doit vérifier $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

5. Utiliser la règle démontrée en étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. (a) Le signe s'obtient par une récurrence simple. La monotonie à l'aide de $a_{n+1} - a_n$.

   (b) Supposer la limite réelle (montrer qu'elle existe dans tous les cas !) et obtenir une contradiction.

   (c) Utiliser encore la règle de d'Alembert.

Partie II : la règle de Raabe-Duhamel

7. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 : étudier de quelle façon on a la limite.

8. Effectuer dans un premier temps un développement asymptotique de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. La suite viendra immédiatement.

9. On rappelle que deux suites équivalentes ont même signe à l'infini. On pourra alors utiliser la comparaison logarithmique.

10. Comme pour la question précédente, on pourra choisir $\beta \in]l, 1[$. Adapter alors le raisonnement précédent.