

## Convergence et sommes de séries : énoncés

### Exercice 1

Calculer les sommes des séries suivantes dans le cas de leur convergence :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} (-1)^n 3^{-n} \quad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)} \quad \text{c) } \sum_{n \geq 2} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

### Exercice 2

Calculer la somme  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$  puis  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$

### Exercice 3

On considère la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ .

1. Exprimer les sommes partielles de la série à l'aide de factorielles.
2. En utilisant la formule de Stirling, montrer la convergence et calculer la somme de la série.

### Exercice 4

Soit  $(x_n)$  la suite définie par  $x_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ .

1. Etudier la monotonie et la convergence de  $(x_n)$ .
2. Calculer  $\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$  puis en déduire la convergence et la somme de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x_n}$ .

### Exercice 5

Pour  $x \neq \pm 1$ , on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ . En étudiant  $(1-x)u_n$ ,

étudier la convergence de  $\sum u_n$  et le cas échéant calculer la somme de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

### Exercice 6

1. En appliquant une formule de Taylor à  $x \mapsto \ln(1+x)$ , montrer la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  et en calculer la somme.

2. Calculer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ .



## Exercices

## Exercice 7

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , déterminer dans le cas de la convergence les sommes  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

## Exercice 8

1. Calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tout  $x \in \mathbb{R}$  la somme  $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .
2. En déduire pour quels  $x$  la série  $\sum_{n \geq 1} nx^n$  converge et donner la somme de la série.
3. En écrivant  $n = n + 1 - 1$ , retrouver le résultat précédent.
4. Calculer lors de sa convergence la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ .

## Exercice 9

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = (-1)^n v_n$  et où  $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$  (intégrale de Wallis).

1. En déterminant une relation liant  $v_{n+2}$  et  $v_n$ , calculer  $v_n$  pour tout entier  $n$ .
2. Montrer la convergence de  $\sum u_n$  puis exprimer la somme de la série au moyen d'une intégrale (que l'on tentera de calculer).

## Exercice 10

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ .

1. Calculer  $I_0, I_1$  et exprimer  $I_n + I_{n+2}$  pour tout entier  $n$ .
2. En déduire l'expression de  $I_n$  au moyen de somme.
3. Montrer la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  et calculer sa somme.

Retrouver également la convergence et la somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

## Indications

### Indications sur l'exercice 1

- Reconnaître le terme général d'une série de référence.
- Effectuer une décomposition en éléments simples du terme général.
- Exprimer comme somme ou différence de ln le terme général.

### Indications sur l'exercice 2

Pour la première somme, effectuer une décomposition en élément simple du terme général. Pour la deuxième somme, discuter de la différence  $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

### Indications sur l'exercice 3

- Séparer dans un premier temps en deux sommes selon les termes pairs et impairs. Effectuer des regroupement de terme dans les ln pour n'en avoir plus qu'un à la fin.
- La formule de Stirling est  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ .

### Indications sur l'exercice 4

- Il s'agit d'une suite récurrente. Etudier la différence  $x_{n+1} - x_n$ . Déterminer les éventuelles limites réelles de  $(x_n)$  selon la fonction qui définit cette suite.
- Montrer que  $\sum \frac{1}{1+x_n}$  est télescopique via le calcul proposé.

### Indications sur l'exercice 5

Identifier  $\sum (1-x)u_n$  comme une série télescopique. On distinguera les cas selon  $|x| < 1$  et  $|x| > 1$

### Indications sur l'exercice 6

- Pour avoir une égalité globale sur  $[0, 1]$ , on pensera à la formule de Taylor avec reste intégral puis on montrera que le reste intégral tend vers 0 pour  $n \rightarrow +\infty$ .
- Lier les sommes partielles de la série en question à celle précédemment trouvée.

### Indications sur l'exercice 7

On rappelle selon un exemple que l'on a  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ . Les sommes en questions sont respectivement celles comportant les termes pairs et impairs de celle rappelée ici.

### Indications sur l'exercice 8

- Identifier la dérivée d'une fonction que l'on sait calculer.
- On a l'expression des sommes partielles selon la première question : discuter de la convergence de celles-ci selon les valeurs de  $x$ .



## Indications

3. Trouver une équation vérifiée par la somme de la série que l'on pourra résoudre pour retrouver l'expression.
4. On pourra dériver une seconde fois puis écrire  $n^2 = n(n-1) + n$ .

**Indications sur l'exercice 9**

1. Procéder à une intégration par partie. Pour envisager ensuite l'expression explicite, essayer sur les premiers rangs la relation de récurrence trouvée.
2. Exprimer les sommes partielles sous forme d'une seule intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)$ . Etudier la convergence de  $f_n(t)$  pour  $n \rightarrow +\infty$  selon les valeurs de  $t$  puis montrer qu'il en est de même pour l'intégrale. Pour le calcul de l'intégrale, penser au changement de variable  $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ .

**Indications sur l'exercice 10**

1. Effectuer des simplifications lorsque  $I_n + I_{n+2}$  est sous la forme d'une seule intégrale.
2. Essayer la relation de récurrence sur les premiers termes pour en déduire (par récurrence) une expression générale de  $I_n$ .
3. Faire le lien entre les sommes partielles et les intégrales et leurs limites.