INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–37

Le but de l'exercice est, pour une fonction de deux variables réelles f, de

– chercher les points critiques,

– calculer la hessienne en l'un deux, M,

– construire sur une même figure la surface S d'équation $z = f(x, y)$, le plan tangent à S au point M(a,b), et la surface H d'équation $z = h(x, y)$ avec

$$h(x,y) = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big(\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H(M) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \Big)$$

– observer la position de S par rapport au plan tangent et observer "concrètement" ce que signifie la formule

$$f(x,y) = h(x,y) + o((x-a)^2 + (y-b)^2) \text{ au voisinage de } (a,b)$$

1)

$f(x,y) = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2} - x^2y^2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer les points critiques de f et les extremums éventuels.

2)

Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $M = (0,0)$

Donner l'équation du plan tangent à la surface S d'équation $z = f(x,y)$ au point M.

Construire sur une première figure, la surface S, le plan tangent et sur une seconde la surface S et la fonction h d'équation

$$z = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big(\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H(M) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \Big).$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1)

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$; pas de problème de dérivation.

$\partial_1 f(x,y) = x - 2xy^2$.

$\partial_2 f(x,y) = y - 2yx^2$.

Les points critiques sont solutions de $x(1-2y^2) = 0$ et $y(1-2x^2) = 0$; la résolution donne, sans problème $(0,0)$, $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Cela fait 5 points critiques, dont $M = (0,0)$

$\nabla f(M) = (\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)) = (0,0)$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 1 - 2y^2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -4xy$, d'après le théorème de Schwarz, et $\partial^2_{2,2} f(,y) = 1 - 2x^2$, donc la hessienne au point (x,y) est

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 1-2x^2 \end{pmatrix}$$

- En $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il y a une valeur propre unique, 1 : le point $(0,0)$ est un minimum relatif.

- Aux points $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, la hessienne est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Il n'y a pas d'extremum en ces points.

- Aux points $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, la hessienne est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Il n'y a pas d'extremum en ces points.

f présente un unique extremum local au point $O = (0,0)$. C'est un minimum local.

2)

D'après le cours, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \langle \nabla f((0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big) + o(x^2+y^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big) + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + o(x^2+y^2) \ ; \ h(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

L'équation du plan tangent à S au point (a,b) est $z = f(a,b) + \langle \nabla f((a,b), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle$;

ici le plan tangent à f en $(0,0)$ pour équation $z = 1$.

```
function Z=F1(x,y) // équation de S
Z=1+(x²+y²)/2-(x²)*(y²)
endfunction
function Z=G1(x,y) // équation du plan tangent
Z=1
endfunction
function Z=H1(x,y) // surface z=h(x,y)
```


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.