



EXERCICES D'INFORMATIQUE



**INFORMATIQUE**

**ENONCE DE L'EXERCICE**

**ENONCE-37**

Le but de l'exercice est, pour une fonction de deux variables réelles  $f$ , de

- chercher les points critiques,
- calculer la hessienne en l'un deux,  $M$ ,
- construire sur une même figure la surface  $S$  d'équation  $z = f(x, y)$ , le plan tangent à  $S$  au point  $M(a, b)$ , et la surface  $H$  d'équation  $z = h(x, y)$  avec

$$h(x, y) = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \left( (x - a \quad y - b) H(M) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right)$$

- observer la position de  $S$  par rapport au plan tangent et observer "concrètement" ce que signifie la formule

$$f(x, y) = h(x, y) + o((x - a)^2 + (y - b)^2) \text{ au voisinage de } (a, b)$$

1) \_\_\_\_\_

$$f(x, y) = 1 + \frac{x^2 + y^2}{2} - x^2 y^2 \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer les points critiques de  $f$  et les extremums éventuels.

2) \_\_\_\_\_

Ecrire le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 au voisinage de  $M = (0, 0)$   
Donner l'équation du plan tangent à la surface  $S$  d'équation  $z = f(x, y)$  au point  $M$ .  
Construire sur une première figure, la surface  $S$ , le plan tangent et sur une seconde la surface  $S$  et la fonction  $h$  d'équation

$$z = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \left( (x - a \quad y - b) H(M) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right).$$

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1) \_\_\_\_\_

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  ; pas de problème de dérivation.

$$\partial_1 f(x, y) = x - 2xy^2.$$

$$\partial_2 f(x, y) = y - 2yx^2.$$

Les points critiques sont solutions de  $x(1 - 2y^2) = 0$  et  $y(1 - 2x^2) = 0$  ; la résolution donne, sans problème  $(0, 0)$ ,  $(x, y) = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

Cela fait 5 points critiques, dont  $M = (0, 0)$

$$\nabla f(M) = (\partial_1 f(0, 0), \partial_2 f(0, 0)) = (0, 0).$$

$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 1 - 2y^2$ ,  $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = -4xy$ , d'après le théorème de Schwarz, et  $\partial_{2,2}^2 f(x, y) = 1 - 2x^2$ , donc la hessienne au point  $(x, y)$  est

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & 1 - 2x^2 \end{pmatrix}$$

- En  $(0, 0)$ ,  $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il y a une valeur propre unique, 1 : le point  $(0, 0)$  est un minimum relatif.

- Aux points  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  et  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ , la hessienne est  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$\lambda$  est valeur propre si et seulement si  $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ . Il n'y a pas d'extremum en ces points.

- Aux points  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  et  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , la hessienne est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$\lambda$  est valeur propre si et seulement si  $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$  ou  $\lambda = -1$ . Il n'y a pas d'extremum en ces points.

$f$  présente un unique extremum local au point  $O = (0, 0)$ . C'est un minimum local.

2) \_\_\_\_\_

D'après le cours, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de  $(0, 0)$  est

$$f(x, y) = f(0, 0) + \langle \nabla f((0, 0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} H(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + o(x^2 + y^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + o(x^2 + y^2)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + o(x^2 + y^2) ; h(x, y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

L'équation du plan tangent à  $S$  au point  $(a, b)$  est  $z = f(a, b) + \langle \nabla f((a, b), \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \rangle ;$

ici le plan tangent à  $f$  en  $(0, 0)$  pour équation  $z = 1$ .

fonction  $Z = F1(x, y)$  // équation de  $S$

$$Z = 1 + (x^2 + y^2)/2 - (x^2) * (y^2)$$

endfunction

fonction  $Z = G1(x, y)$  // équation du plan tangent

$$Z = 1$$

endfunction

fonction  $Z = H1(x, y)$  // surface  $z = h(x, y)$

page 2

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.