INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–37

Le but de l'exercice est, pour une fonction de deux variables réelles f, de
– chercher les points critiques,
– calculer la hessienne en l'un deux, M,
– construire sur une même figure la surface S d'équation $z = f(x, y)$, le plan tangent à S au point M(a,b), et la surface H d'équation $z = h(x, y)$ avec

$$h(x, y) = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big((\, x-a \quad y-b \,)\, H(M) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \Big)$$

– observer la position de S par rapport au plan tangent et observer "concrètement" ce que signifie la formule

$$f(x, y) = h(x, y) + o((x-a)^2 + (y-b)^2) \text{ au voisinage de } (a, b)$$

1)

$f(x, y) = 1 + \dfrac{x^2 + y^2}{2} - x^2y^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer les points critiques de f et les extremums éventuels.

2)

Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $M = (0, 0)$

Donner l'équation du plan tangent à la surface S d'équation $z = f(x, y)$ au point M.

Construire sur une première figure, la surface S, le plan tangent et sur une seconde la surface S et la fonction h d'équation

$$z = f(M) + \langle \nabla f(M), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big((\, x-a \quad y-b \,)\, H(M) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \Big).$$

 Jean MALLET

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 37

1)

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$; pas de problème de dérivation.

$\partial_1 f(x,y) = x - 2xy^2$.

$\partial_2 f(x,y) = y - 2yx^2$.

Les points critiques sont solutions de $x(1-2y^2) = 0$ et $y(1-2x^2) = 0$; la résolution donne, sans problème $(0,0)$, $(x,y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Cela fait 5 points critiques, dont $M = (0,0)$

$\nabla f(M) = (\partial_1 f(0,0), \partial_2 f(0,0)) = (0,0)$.

$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 1 - 2y^2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = -4xy$, d'après le théorème de Schwarz, et $\partial^2_{2,2} f(,y) = 1 - 2x^2$, donc la hessienne au point (x,y) est

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 1-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 1-2x^2 \end{pmatrix}$

- En $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il y a une valeur propre unique, 1 : le point $(0,0)$ est un minimum relatif.

- Aux points $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, la hessienne est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Il n'y a pas d'extremum en ces points.

- Aux points $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, la hessienne est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre si et seulement si $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Il n'y a pas d'extremum en ces points.

f présente un unique extremum local au point $O = (0,0)$. C'est un minimum local.

2)

D'après le cours, le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(0,0)$ est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \langle \nabla f((0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2}\Big((\,x \quad y\,)\, H(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big) + o(x^2+y^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\Big((\,x \quad y\,) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big) + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2) + o(x^2+y^2) \;;\; h(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

L'équation du plan tangent à S au point (a,b) est $z = f(a,b) + \langle \nabla f((a,b), \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \rangle$;

ici le plan tangent à f en $(0,0)$ pour équation $z = 1$.

```
function Z=F1(x,y) // équation de S
Z=1+(x²+y²)/2-(x²)*(y²)
endfunction
function Z=G1(x,y) // équation du plan tangent
Z=1
endfunction
function Z=H1(x,y) // surface z=h(x,y)
```