BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 28 avril 2015 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, on confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,;\, P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

Partie I : Étude d'endomorphismes

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\phi(Q) = WQ$.

2. Montrer que l'application $\phi : Q \longmapsto WQ$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.

3. En déduire une base de E et la dimension de E.

Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X).$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors

$$\Delta(Q) = \big((X+1)^2 - 3(X+1) + 5\big) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2.$$

EMLYON Business School est affiliée à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon.

4. **a.** Montrer que l'application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer, pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.

c. Déterminer le noyau et l'image de Δ.

d. Établir : $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$.

On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$, où ϕ^{-1} désigne l'application réciproque de l'application ϕ.

5. **a.** Montrer : $f \circ f \circ f = 0$.

b. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c. Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

d. Est-ce que f est diagonalisable ?

PARTIE II : Étude d'un produit scalaire

On considère l'application $\langle \cdot , \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \quad \langle P_1 , P_2 \rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k).$$

6. Montrer que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

On munit dorénavant $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$.

On considère les trois polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3), \qquad L_2 = (X-1)(X-3), \qquad L_3 = (X-1)(X-2).$$

7. Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. **a.** Exprimer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1), P(2), P(3)$.

b. Exprimer $\Delta(L_1), \Delta(L_2), \Delta(L_3)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$.

On note, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i = W L_i$.

9. **a.** Montrer que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $M_i(i)$ est non nul.

On note alors, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

b. Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire ϕ dans les bases (L_1, L_2, L_3) de $\mathbb{R}_2[X]$ et (N_1, N_2, N_3) de E.

11. Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

12. On note, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$: $u(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i)\, N_i$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b. Montrer : $\forall P \in \mathbb{R}_4[X], \ \forall j \in \{1, 2, 3\}, \ \langle P - u(P) , N_j \rangle = 0$.

c. En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

d. Déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, on note E l'ensemble des fonctions $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\text{il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0.$$

On remarquera que l'entier p dépend a priori de la fonction u considérée.

Partie I : Définition de la transformée de Laplace

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Soit u un élément de E.
Montrer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2\, u(t)\, \mathrm{e}^{-xt} = 0$.

En déduire que, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

Dans toute la suite du problème, pour tout élément u de E, on définit la fonction $L(u)$ sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

3. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$: $\quad L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$.

Partie II : Quelques exemples

4. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. On considère, pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, la fonction $v_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad v_i(t) = t^i\, \mathrm{e}^{-at}.$$

Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, montrer que la fonction v_i appartient à E et, en utilisant par exemple des résultats sur la loi exponentielle, calculer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $L(v_i)(x)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On considère la fonction $w_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad w_n(t) = t^n$.

Montrer que la fonction w_n appartient à E et montrer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $\quad L(w_n)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Partie III : Propriétés des transformées de Laplace

6. Limite de $L(u)$ en $+\infty$

Soit u un élément de E. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A, M \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$\forall t \in [A\,;+\infty[, \quad |u(t)| \leqslant t^p \quad \text{et} \quad \forall t \in [0\,;A], \quad |u(t)| \leqslant M.$$

Établir : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad |u(t)| \leqslant M + t^p$. En déduire : $\quad \displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} L(u)(x) = 0$.

7. Limite de $L(u)$ en 0

Soit u un élément de E tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(s)\, \mathrm{d}s$ converge.

On note, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $R(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} u(s)\, \mathrm{d}s$.

a. Déterminer la limite en $+\infty$ de R. Montrer que R appartient à E.

b. Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad R'(t) = -u(t)$.

c. En déduire : $\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x)$.

d. Soit $\varepsilon \in]0\,;+\infty[$. Justifier qu'il existe $B \in [0\,;+\infty[$ tel que : $\quad \forall t \in [B\,;+\infty[, \quad |R(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En déduire : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad |L(u)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^B |R(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}$.

e. Conclure : $\quad \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u' \in E$.

a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A \in [0\,;+\infty[$ tels que : $\quad \forall t \in [A\,;+\infty[, \quad |u(t)| \leqslant |u(A)| + \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$.

b. En déduire que u appartient à E.

c. Établir : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x)$.

9. Dérivée puis dérivée n-ième d'une transformée de Laplace

Soit u un élément de E. On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u_n(t) = t^n u(t).$$

a. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction u_n appartient à E.

b. Montrer : $\quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{e}^a - 1 - a| \leqslant \dfrac{a^2}{2}\,\mathrm{e}^{|a|}$.

c. Soient $x \in]0\,;+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \dfrac{x}{2}$.

Montrer : $\quad \forall t \in [0\,;+\infty[, \quad \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+h)t} - \mathrm{e}^{-xt}}{h} + t\,\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant |h|\,\dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-xt/2}$.

En déduire : $\quad \left|\dfrac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 |u(t)|\,\mathrm{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t$.

d. Montrer que $L(u)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer $\big(L(u)\big)'$ à l'aide de $L(u_1)$.

e. Montrer que $L(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\big(L(u)\big)^{(n)}$ à l'aide de $L(u_n)$.

Partie IV : Application à la résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie, on cherche à déterminer une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{et} \quad u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = -2.$$

10. On suppose qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, solution du problème et telle que $u'' \in E$.

a. Montrer que u appartient à E et : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x)$.

b. En déduire : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad (x^2 + 5x + 6)\,L(u)(x) = \dfrac{1}{x+1} + 3 + x$,

puis : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad L(u)(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x+3}$.

11. En déduire une fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution du problème posé.

• FIN •

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1199 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

EM-LYON 2015 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

PARTIE I : étude d'endomorphismes

1)

Il est clair que $E \subset \mathbb{R}_4[X]$ et que $E \neq \emptyset$ car le polynôme nul appartient à E (de même que le polynôme $X(X-4)$).

$\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (P+\lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0) = 0$ et $(P+\lambda Q)(4) = P(4) + \lambda Q(4) = 0$. Donc $P + \lambda Q \in E$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X]}$$

2)

Il est clair également que WQ appartient à E , en effet, $(WQ)(0) = W(0)Q(0) = 0$ et $(WQ)(4) = W(4)Q(4) = 0$; $\deg(Q) \leq 2 \Longrightarrow WQ \in \mathbb{R}_4[X]$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2,\ \varphi(P + \alpha Q) = W(P + \alpha Q) = WP + \alpha WQ = \varphi(P) + \alpha\varphi(Q)$. Conclusion :

L'application φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E : $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], E)$

$\forall Q \in E,\ Q(0) = Q(4) = 0$, on peut factoriser Q par $X(X-4)$. Il existe donc un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q = WP$

$$\forall Q \in E,\ \exists ! P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ Q = \varphi(P) : \varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E$$

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E}$$

3)

Il en résulte que $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$ est une base de E puisque $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{La famille } (W, WX, WX^2) \text{ est une base de } E : \dim E = 3}$$

4–a)

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$;

$\Delta(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c = 2aX + (a+b) = a(2X+1) + b$.

On remarque que $\Delta(1) = 0,\ \Delta(X) = 1$ et $\Delta(X^2) = 2X + 1$, donc

$\Delta(aX^2+bX+c) = a\Delta(X^2)+b\Delta(X)+c\Delta(1)$. Ceci prouve que Δ est linéaire et, puisque $\Delta(P) \in \mathbb{R}_2[X]$, on conclut

$$\boxed{\text{L'application } \Delta \text{ appartient à } \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$$

4–b)

D'après le calcul précédent,

$\deg(P) = 2 \Longrightarrow \deg(\Delta)(P) = 1$ car $a \neq 0$; $\deg(P) = 1 \Longrightarrow \deg(\Delta)(P) = 0$ car $a = 0$ et $b \neq 0$. ; $\deg(P) = 0 \Longrightarrow \Delta(P) = 0$ (polynôme nul), donc $\deg(\Delta)(P) = -\infty$.

4–c)

$P \in \operatorname{Ker}\Delta \Longleftrightarrow a = 0$ et $a+b = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0 \Longleftrightarrow P = c$ où c est indéterminé.

$$\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$$

D'après le cours,

$\operatorname{Im}\Delta = \operatorname{vect}(\Delta(1), \Delta(X), \Delta(X^2)) = \operatorname{vect}(0, 1, 2X+1) = \operatorname{vect}(1, 2X+1) = \operatorname{vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

$\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_1[X]$: $\dim \operatorname{Im}\Delta = 2$ (on s'y attendait avec le théorème du rang).

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X] \text{ et } \operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_1[X]}$$

4–d)

Soit $P = aX^2+bX+c$ un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$;

$\Delta(P) = 2aX+a+b$; $\Delta^2(P) = 2a$; $\Delta^3(P) = 0$.

$$\boxed{\Delta^3 = 0, \text{ endomorphisme nul de } \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$$

5–a)

φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E, donc φ^{-1} est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}_2[X]$; par suite

φ^{-1} va de E sur $\mathbb{R}_2[X]$; Δ va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$; φ va de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E.

$f = \varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1}$ est bien un endomorphisme de E ; rappelons : $\varphi^{-1}\circ\varphi = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

$$\begin{aligned}
f\circ f\circ f &= (\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1}) \\
&= \varphi\circ\Delta\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ\Delta\circ(\varphi^{-1}\circ\varphi)\circ\Delta\circ\varphi^{-1} \quad \text{par associativité} \\
&= \varphi\circ\Delta\circ\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\circ\Delta\circ\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\circ\Delta\circ\varphi^{-1} \\
&= \varphi\circ\Delta\circ\Delta\circ\Delta\circ\varphi^{-1} \\
&= \varphi\circ 0\circ\varphi^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f\circ f\circ f = 0}$$

5–b)

Soit (W, WX, WX^2) la base de E donnée par la question 2). On a :

$W = \varphi(1),\ WX = \varphi(X),\ WX^2 = \varphi(X^2)$ ce qui équivaut à

$1 = \varphi^{-1}(W),\ X = \varphi^{-1}(WX),\ X^2 = \varphi^{-1}(WX^2)$.

$$\begin{aligned}
f(W) &= (\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1})(W) &&= \varphi\circ\Delta(\varphi^{-1}(W)) &&= \varphi\circ\Delta(1) = \varphi(0) = 0 \\
f(WX) &= (\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1})(WX) &&= \varphi\circ\Delta(\varphi^{-1}(WX)) &&= \varphi\circ\Delta(X) = \varphi(1) = W \\
f(WX^2) &= (\varphi\circ\Delta\circ\varphi^{-1})(WX^2) &&= \varphi\circ\Delta(\varphi^{-1}(WX^2)) &&= \varphi\circ\Delta(X^2) = \varphi(2X) = 2WX
\end{aligned}$$

Or $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(W), f(WX), f(WX^2)) = \operatorname{vect}(0, W, WX) = \operatorname{vect}(W, WX)$

La famille (W, WX) est libre car extraite de la base (W, WX, WX^2) de E. C'est une base de $\operatorname{Im} f$.

D'après le théorème du rang, puisque $\dim E = 3$ (voir I–3)), $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ Or, le vecteur W appartient à $\operatorname{Ker} f$, il est non nul, il en forme donc une base.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(W, WX) \ ;\ \dim \operatorname{Im} f = 2 \ ;\ \operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(W) \ ;\ \dim \operatorname{Ker} f = 1}$$