BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 283

Conception : HEC Paris – ESCP Europe

MATHÉMATIQUES II

OPTION SCIENTIFIQUE

Mercredi 6 mai 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

Dans tout le problème :

- On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A})$ qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité P.
- On note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ S_X(x) = P([X > x])$.

Dans le cadre de l'évaluation des risques encourus par des établissements financiers, il est nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements (espérance mathématique "pure") un terme correctif d'autant plus important que le risque est plus grand.
L'objet du problème est de déterminer grâce à une "fonction de distorsion", une "espérance corrigée" qui prend en compte cette notion de risque et qui possède les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier, une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.

Partie I. Probabilité de surpassement et espérance.

1. On suppose uniquement dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ (avec $\lambda > 0$).
   a) Vérifier l'égalité : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition F de X et interpréter $E(X)$ en terme d'aire grâce à la formule précédente.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.
   a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Déterminer deux réels c et d vérifiant pour tout réel $x \geqslant 0$, la relation : $h(x) = \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{x+2}$.
   En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$.
   c) Montrer que la fonction $f_0 : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ln 2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

3. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f_0 définie à la question 2.c).

a) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

b) Pour tout x réel, calculer $S_X(x)$ et en trouver un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,\mathrm{d}x$.

4.a) Justifier la monotonie de la fonction S_X et trouver la limite de $S_X(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la fonction S_X est continue à droite. À quelle condition est-elle continue en 0 ?

5. Dans cette question, on suppose que X admet une densité f nulle sur $]-\infty, 0]$, continue sur $]0, +\infty[$ mais non nécessairement en 0.

a) Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Établir pour tout réel $A \geqslant 0$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^A S_X(x)\,\mathrm{d}x = AS_X(A) + \int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x$.

d) En déduire que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, alors X admet une espérance.

e) Montrer que si X admet une espérance, alors on a pour tout réel $A \geqslant 0$: $\displaystyle\int_A^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant AS_X(A)$.

f) Déduire des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,\mathrm{d}x$ [1].

6. Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Établir pour tout entier naturel n, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_X(k) = (n+1)P\big([X \geqslant n+1]\big) + \sum_{k=0}^{n} k\,P\big([X=k]\big)$.

b) En déduire que si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.

c) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, et que dans ce cas, on a : $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n)$.

d) On suppose que X admet une espérance.

(*i*) Exprimer pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^N S_X(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général $S_X(n)$.

(*ii*) En déduire que $E(X) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A S_X(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, la relation [1] reste applicable dans le cas des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$; on admet qu'elle reste applicable à toute variable aléatoire pour laquelle l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)\,dx$ est convergente.

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple.

On appelle *fonction de distorsion* toute fonction g définie, continue et croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifie les trois propriétés supplémentaires suivantes : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et g est concave sur $]0, 1[$.

Pour toute fonction de distorsion g, on dit que X admet une *espérance corrigée par g*, si la fonction composée $g \circ S_X$ admet une intégrale convergente sur $[0, +\infty[$.

Cette intégrale, notée $E_g(X)$, est appelée espérance de X corrigée par g. Ainsi : $E_g(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(S_X(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

7. *Exemple* . Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite dont la dérivée, notée φ, est telle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

a) Justifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\,0,1[$. On note Ψ la bijection réciproque de Φ.

Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et w_α la fonction définie sur $[\,0,1]$ telle que : $w_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \Phi\big(\Psi(x) - \Psi(\alpha)\big) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

b) Montrer que la fonction w_α est continue sur $[\,0,1]$ et dérivable sur $]\,0,1[$.

c) On note w'_α la dérivée de w_α. Établir pour tout $x \in]\,0,1[$, la relation : $w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \dfrac{\big(\Psi(\alpha)\big)^2}{2}\right)$.

d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction w_α au point d'abscisse α.

e) Vérifier que w_α est une fonction de distorsion.

8. On considère à nouveau la fonction de distorsion w_α définie dans la question 7.

Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale d'écart-type égal à 1, dont l'espérance est notée μ, et soit X une variable aléatoire qui suit la même loi que $\exp(Y)$.

a) Justifier l'existence de l'espérance de X et la calculer.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $w_\alpha\big(S_X(x)\big) = P\big([X\,\mathrm{e}^{-\Psi(\alpha)} > x]\big)$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $E_{w_\alpha}(X)$.

9. Pour faire tracer par *Scilab* la courbe représentative de w_α, on utilise la fonction `cdfnor` qui permet de calculer les valeurs de la fonction de répartition de variables aléatoires de loi normale.

Si une variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite et si x et p sont deux réels reliés par l'égalité $P\big([Z \leqslant x]\big) = p$, alors :

- p est calculable en *Scilab* par `cdfnor("PQ",x,0,1)` ;
- x est calculable en *Scilab* par `cdfnor("X",0,1,p,1-p)`.

Le graphique ci-dessous a été obtenu en affectant successivement à la variable `alpha` les valeurs 0.2 et 0.4, et en exécutant les cinq instructions codées comme suit, la quatrième étant incomplète.

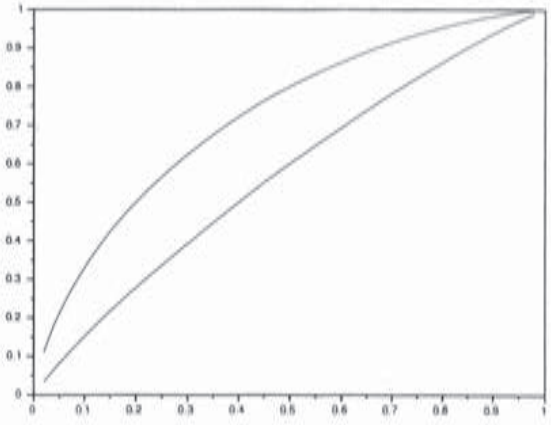
(1) `qa=cdfnor("X",0,1,alpha,1-alpha)`

(2) `p=[0.02 :0.01 :0.98]`

(3) `q=cdfnor("X",zeros(p),ones(p),p,1-p)-qa*ones(p)`

(4) `wa=cdfnor("PQ", ?, ?, ?)`

(5) `plot(p,wa)`



a) Quelles sont les valeurs affectées aux variables p et q par les instructions (2) et (3) (on en précisera le format matriciel) ?

b) Compléter la quatrième ligne de code.

c) À laquelle des deux courbes correspond la valeur $\alpha = 0.2$ (on justifiera mathématiquement la réponse) ?

d) Comment trouver les tangentes aux deux courbes en (0,0) et (1,1) ?

e) Que deviendrait la courbe représentative de w_α si on faisait tendre α vers 0 ?

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées.

Les notations et le contexte de cette partie sont identiques à ceux des parties I et II.

Dans cette partie, on note g une fonction de distorsion arbitraire et on suppose l'existence de $E_g(X)$.
Soit B un réel positif et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $P\big([Y \in [0,B]]\big) = 1$.
L'objectif de cette partie consiste à établir l'inégalité : $E_g(X+Y) \leqslant E_g(X) + E_g(Y)$ [2].

10. a) Soit x un réel fixé de $[0,1]$. Justifier pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$g\left(x\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\frac{1}{n}\right) \geqslant x\, g\left(1-\frac{1}{n}\right)+(1-x)\, g\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) En déduire que $g(x) \geqslant x$.

c) Soit a, b et ε trois réels tels que : $0 < a < b < b+\varepsilon < 1$.

Justifier l'existence d'un réel $\lambda \in [0,1]$ vérifiant les deux égalités : $\begin{cases} \lambda\, a + (1-\lambda)(b+\varepsilon) = b \\ (1-\lambda)\, a + \lambda\,(b+\varepsilon) = a+\varepsilon \end{cases}$,

En déduire l'inégalité : $g(b+\varepsilon) - g(a+\varepsilon) \leqslant g(b) - g(a)$.

11. a) Montrer que $E(X)$ existe et que $E(X) \leqslant E_g(X)$.

b) Montrer que si X est une variable aléatoire certaine, on a $E_g(X) = E(X)$.

c) Soit $r > 0$ et $s \geqslant 0$. Montrer que $E_g(rX+s)$ existe et que : $E_g(rX+s) = rE_g(X) + s$.

d) Soit T et W deux variables aléatoires telles que $P\big([0 \leqslant T \leqslant W]\big) = 1$.

Sous réserve d'existence, comparer $E_g(T)$ et $E_g(W)$.

12. Justifier l'existence de $E_g(Y)$ et de $E_g(X+Y)$; établir les inégalités : $E_g(Y) \leqslant B$ et $E_g(X+Y) \leqslant E_g(X)+B$.

13. On se propose de montrer par récurrence sur l'entier n que l'inégalité [2] est vraie pour toute variable aléatoire U telle que $P\big([U \in [\![0,n]\!]]\big) = 1$.

Soit n un entier naturel donné. On suppose que quelle que soit la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$, l'inégalité [2] est vraie pour toute fonction de distorsion g, pour toute variable aléatoire X possédant une espérance corrigée par g et pour toute variable aléatoire U telle que $P\big([U \in [\![0,n]\!]]\big) = 1$.

a) Déduire de la question 12 que la propriété ci-dessus est vérifiée pour $n = 0$.

b) On suppose la propriété ci-dessus vérifiée pour un entier naturel n donné.

Soit Z une variable aléatoire telle que $P\big([Z \in [\![0,n+1]\!]]\big) = 1$ et $p = P\big([Z>0]\big) > 0$.

On pose $P^* = P_{[Z>0]}$ (probabilité conditionnelle sachant $[Z>0]$). Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$S_X^*(x) = P^*\big([X>x]\big),\ S_Z^*(x) = P^*\big([Z>x]\big) \text{ et } S_{X+Z}^*(x) = P^*\big([X+Z>x]\big).$$

(*i*) Établir l'égalité : $S_{X+Z}(x) = (1-p)\, P_{[Z=0]}\big([X>x]\big) + p\, S_{X+Z}^*(x)$.

(*ii*) Exprimer $S_X(x)$ et $S_Z(x)$ en fonction de p, $P_{[Z=0]}\big([X>x]\big)$, $S_X^*(x)$ et $S_Z^*(x)$.

(*iii*) En utilisant le résultat de la question 10.c), déduire des relations précédentes l'inégalité :

$$g\big(S_{X+Z}(x)\big) - g\big(S_X(x)\big) - g\big(S_Z(x)\big) \leqslant g\big(pS_{X+Z}^*(x)\big) - g\big(pS_X^*(x)\big) - g\big(pS_Z^*(x)\big).$$

c) Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{g(px)}{g(p)}$ est une fonction de distorsion et établir l'inégalité :

$$\int_0^{+\infty} h\big(S_{X+Z}^*(x)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} h\big(S_X^*(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} h\big(S_Z^*(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

d) En déduire l'inégalité : $E_g(X+Z) \leqslant E_g(X) + E_g(Z)$. Conclure.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose : $Y_n(\omega) = \dfrac{1}{n}\lfloor n\,Y(\omega)\rfloor$, où $\lfloor u\rfloor$ désigne la partie entière de u.

a) Justifier l'existence de $E_g(Y_n)$ et $E_g(X+Y_n)$; établir l'inégalité : $E_g(X+Y_n) \leqslant E_g(X) + E_g(Y_n)$.

b) Pour $x > 0$, comparer les événements $[Y_n > x]$ et $[Y > x]$, et montrer que $E_g(Y_n) \leqslant E_g(Y)$.

c) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} g\big(S_{X+Y}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x+\frac{1}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \leqslant E_g(X+Y_n)\,.$$

d) En déduire l'inégalité [2].

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1180 – D'après documents fournis

Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

HEC-ESCP 2015 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I : probabilité de surpassement et espérance

1–a)

$\forall x \geq 0 \quad S_X(x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \displaystyle\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$

$= 1 - \Big[- e^{-\lambda t} \Big]_0^x$

$= 1 - (-e^{-\lambda x} + 1) = e^{-\lambda x}$

$E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \lambda t e^{-\lambda t} dt$. Dans l'intégrale, faisons une intégration par parties ;

$u(t) = t \Longrightarrow u'(t) = 1$; $v'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Longleftarrow v(t) = -e^{-\lambda t}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

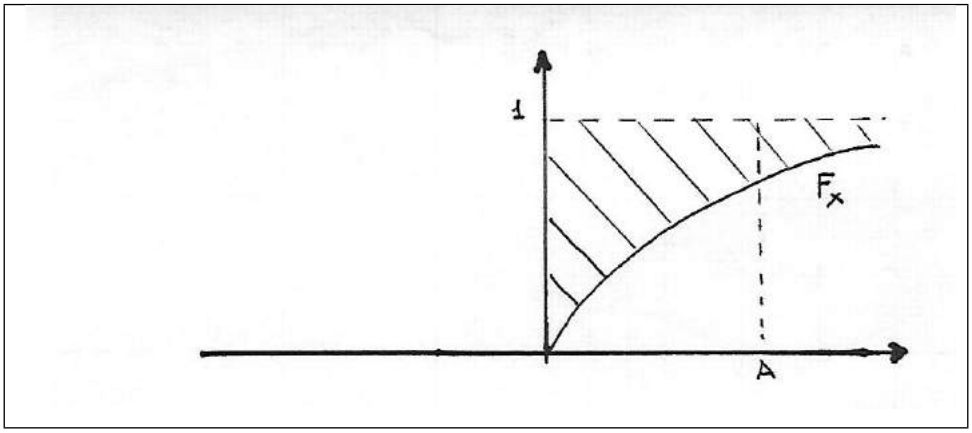
$\displaystyle\int_0^b \lambda t e^{-\lambda t} dt = \Big[- t e^{-\lambda t} \Big]_0^b + \int_0^b e^{-\lambda t} dt$

$= -b e^{-\lambda b} + \displaystyle\int_0^b S_X(t) dt$

Les deux intégrales convergent en $+\infty$, $\lim\limits_{b \to +\infty} b e^{-\lambda b} = 0$ par croissances comparées, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx}$$

1–b)



 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S_X(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.

Pour $A \geq 0$, $\displaystyle\int_0^A S_X(x)dx = \int_0^A (1 - F(x))dx = A - \int_0^A F(x)dx$.

$\displaystyle\int_0^A F(x)dx$ est l'aire sous la courbe de F, au dessus de l'axe des abscisses, comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = A$.

A est l'aire du rectangle de côtés les deux droites précédentes, l'axe des abcsisses et la droite d'équation $y = 1$. Par conséquent, $A - \displaystyle\int_0^A F(x)dx$ est l'aire du domaine situé au dessus de la courbe de F, sous la droite $y = 1$, comprise entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = A$.

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} S_X(x)dx$ est l'aire du domaine situé entre la courbe représentative de F_X, la droite $y = 1$ et à droite de l'axe des ordonnées.

2–a)

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ est impropre en $+\infty$ uniquement.

$h(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$; l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge d'après le critère de Riemann $(2 > 1)$; par équivalence des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge ; sur $[0, 1]$, h est continue, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ existe.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ est convergente

2–b)

$$\begin{aligned} \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} &= \frac{(c+d)x + 2c + d}{(x+1)(x+2)} \\ h(x) = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} &\iff \forall x \geq 0,\ (c+d)x + 2c + d = 1 \\ &\iff c = 1\ ;\ d = -1 \end{aligned}$$

$$\forall x \geq 0,\ h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$ est la fonction $x \mapsto = \ln(x+1) - \ln(x+2)$

2–c)

La fonction f_0 est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_0(x)dx &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{A \to +\infty} \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^A \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{A \to +\infty} \Big(\ln(\tfrac{A+1}{A+2}) - \ln(\tfrac{1}{2})\Big) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \times (-\ln(\tfrac{1}{2})) = \frac{1}{\ln 2} \times \ln 2 = 1 \end{aligned}$$

La fonction f_0 est une densité de probabilité

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 25 pages.