Voie S

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E, on pose : $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E.
   (c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout (P, Q) de E^2, on note :
$$< P, Q >= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\ dt.$$
   (a) Montrer que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $< P, Q >$ est bien défini.
   (b) Montrer que $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ définit un produit scalaire sur E.
3. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :
$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{< P_i, X^k >}{< P_i, P_i >} P_i.$$
   (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ.

EXERCICE 2

1. On note pour tout $x \in I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire les variations de u sur I.
   (d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \dfrac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos x)^2}$.
   (e) En déduire les variations de v sur I.
   (f) Montrer que :
$$\forall x \in I,\ g(x) < x < f(x).$$
2. (a) En utilisant le fait que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
   (b) Déduire de la question 1(f) un encadrement de π.

3. On pose pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

   (a) Justifier que pour tout réel θ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$

   et en déduire que pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \qquad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

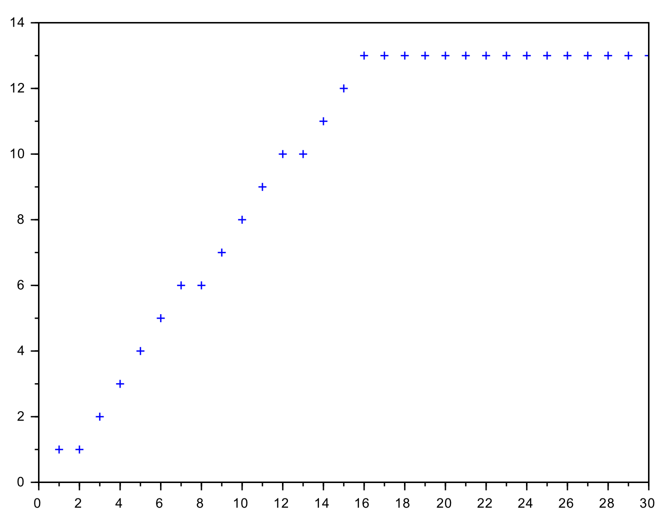
   (c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.

   (d) Compléter la fonction Scilab suivante afin qu'elle retourne, à l'aide des relations $(*)$ et $(**)$ et de la question 3(b), une approximation x de π à e près, ainsi que le nombre k d'itérations qui ont été nécessaires.

```
function [x,k]=h(e)
          k = 0
          a = sqrt(3) / 2
          b = 1 / 2
          while ____________
                    a = ____________
                    b = ____________
                    k = ____________
          end
          x = ____________
          endfunction
```

   (e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et qui retourne un vecteur de taille p qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k}, pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

   (f) On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



   Commenter ce graphe.

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Dans tout le problème, on considère X une variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X.
On note pour tout entier $n \geqslant 2$, $Y_n = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \ Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.
Si la loi de X est implosive, on appelle **indice d'implosion de** X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Y_m admet une espérance.

On notera F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de Y_n pour tout entier $n \geqslant 2$.
Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la notera f (resp. f_n).

Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n\,.$$

2. On suppose dans cette question que X admet une densité f. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, Y_n admet une densité f_n et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_n(x) = nf(x)\,(1 - F(x))^{n-1}\,.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}^+$ et dont on note la fonction de répartition Φ, on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance } \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt.$$

(a) Montrer que :

$$\forall x \geqslant 0,\ \ \int_0^x t\varphi(t)dt = \int_0^x (1 - \Phi(t))dt - x(1 - \Phi(x)).$$

(b) On suppose que V admet une espérance.
Montrer que $x\,(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge.

(c) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\,dt$ converge. Montrer que V admet une espérance.

(d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{\alpha}{1 + x^2} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(a) Déterminer le réel α.

(b) Donner la fonction de répartition F de X.

(c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2, que l'on calculera.

(d) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.

(f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.

5. On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = P(X \leqslant k)$.

(d) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance ?

(e) Déterminer la loi de Y_3. Admet-elle une espérance ?

(f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il, pour tout entier naturel $m \geqslant 2$, une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à m ?* »

6. Soit $\alpha > 1$.

(a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité. Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

(d) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

(e) Répondre à la question posée.

Partie D - Lois non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « *Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ?* »

7. (a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)} & \text{si } x \geqslant 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

(b) Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité. Déterminer la fonction de répartition F de X.

(c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n.

(e) Répondre à la question posée.

Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire X implose sur Y** si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m est de même loi que Y.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que Y_n a la même loi que Y. À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y.
9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y.
10. Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice d'implosion m qui implose sur Y.
(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).
11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g. On note G sa fonction de répartition.
Soit m un entier tel que $m \geqslant 2$. Montrer que s'il existe une variable aléatoire X implosive, d'indice d'implosion m, qui implose sur Y, alors pour tout entier k tel que $k \geqslant m$, il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion k, qui implose sur Y.

Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de X est explosive** s'il existe un entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance. Si la loi de X est explosive, on appelle **indice d'explosion** de X le plus petit entier $m \geqslant 2$ tel que Z_m n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

ECRICOME 2015 VOIE S

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

$\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned}
\varphi(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)'' - 2X(P+\lambda Q)' \\
&= P'' + \lambda Q'' - 2XP' - 2\lambda XQ' \quad \text{linéarité des dérivations} \\
&= (P'' - 2XP') + \lambda(Q'' - 2XQ') \\
&= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)
\end{aligned}$$

φ est linéaire

Il est évident que $P'' - 2XP' \in \mathbb{R}[X]$.

$\forall P \in E,\ \deg(P) \leq n-2,\ \deg(2XP') = \deg(P) \leq n$, donc $\deg(P'' - 2XP) \leq n$. Par suite $\varphi(P) \in E$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$$

1–b)

$\varphi(X^0) = \varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = -2X$; $\forall k \in [\![2,n]\!],\ \varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$. D'où le matrice A de φ dans la base canonique de E.

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & & 0 & & & \cdots & 0 \\
0 & -2 & 0 & 6 & \cdots & & & & & & \vdots \\
0 & \ddots & -4 & \ddots & \ddots & & & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & k(k-1) & & & & \\
 & & & & & \ddots & 0 & \ddots & & & \\
 & & & & & & -2k & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & n(n-1) \\
 & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & -2n
\end{pmatrix}$$

1–c)

La matrice A est triangulaire supérieure ; ses valeurs propres sont ses termes diagonaux. Donc $\text{spect}(A) = \text{spect}(\varphi) = \{-2k\ /\ 0 \leq k \leq n\}$

$\text{Card}(\text{spect}(\varphi)) = \dim E = n+1$, donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$

2–a)

- Si $PQ = 0$, alors $\langle P, Q\rangle$ existe et vaut 0.
- Si $PQ \neq 0$. Notons $a_r t^r$ le terme dominant de $P(t)Q(t)$ (on a $a_r \neq 0$).

$$t^2|P(t)Q(t)e^{-t^2}| \underset{\pm\infty}{\sim} |a_r t^{r+2} e^{-t^2}| \quad \textbf{(2.a)}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} |a_r t^{r+2} e^{-t^2}| = 0$, ce qui veut dire $|a_r t^r e^{-t^2}| \underset{\pm\infty}{=} \circ(\frac{1}{t^2})$

Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{t^2}$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ sont convergentes d'après le critère de Riemann puisque $2 > 1$. Par la règle de négligeabilité des fonctions continues, positives, les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} |a_r t^r e^{-t^2}|dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |a_r t^r e^{-t^2}|dt$ sont convergentes.

D'après les équivalences (2.a), les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} |P(t)Q(t)e^{-t^2}|dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |P(t)Q(t)e^{-t^2}|dt$ sont convergentes ;

cela veut dire que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ sont absolument convergentes, donc convergentes. Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue ; l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ existe.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ est convergente.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle \text{ existe}}$$

2–b)

- $\forall (P, Q, R) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle P + \lambda Q, R\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P(t) + \lambda Q(t))R(t)e^{-t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(P(t)R(t)e^{-t^2} + \lambda Q(t)R(t)e^{-t^2}\Big)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t^2}dt + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t^2}dt \\
&\quad \text{linéarité de l'intégration des intégrales convergentes} \\
&= \langle P, R\rangle + \lambda \langle Q, R\rangle
\end{aligned}$$

L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est symétrique sans problème, on en conclut que cette application est bilinéaire, symétrique.

- $\forall P \in E,\ \langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}dt \geq 0$.

La fonction $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}$ donc l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}dt = 0$ implique $\forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t^2} = 0$, donc $P(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall P \in E,\ \langle P, P\rangle \geq 0 \text{ et } \langle P, P\rangle = 0 \Longrightarrow P = 0.$$

$$\boxed{\text{L'application } (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

3)

$$\begin{aligned}\forall (P,Q)\in E^2,\ \langle \varphi(P),Q\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(P)(t))Q(t)e^{-t^2}dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t)-2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}dt\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

Posons $A=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}dt$ et $B=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}dt$.

- Dans A faisons une intégration par parties ; pour cela soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et posons $A(a,b)=\displaystyle\int_a^b P''(t)Q(t)e^{-t^2}dt$

$v'(t)=P''(t) \Longleftarrow v(t)=P'(t)$; $u(t)=Q(t)e^{-t^2} \Longrightarrow u'(t)=Q'(t)e^{-t^2}-2tQ(t)e^{-t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, l'intégration par parties est légitimée.

$$\begin{aligned}A(a,b) &= \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2}\right]_a^b - \int_a^b P'(t)(Q'(t)e^{-t^2}-2tQ(t)e^{-t^2})dt\\ &= P'(b)Q(b)e^{-b^2}-P'(a)Q(a)e^{-a^2}-\int_a^b P'(t)(Q'(t)e^{-t^2}-2tQ(t)e^{-t^2})dt\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{a\to-\infty} P''(a)Q(a)e^{-a^2}=\lim\limits_{b\to+\infty} P''(b)Q(b)e^{-b^2}=0$.

Or $A=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} A(a,b)$, donc $A=-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)\Big(Q'(t)e^{-t^2}-2tQ(t)e^{-t^2}\Big)dt$ (il n'y a aucun problème de convergence d'intégrale).

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P),Q\rangle &= A-B\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)\Big(Q'(t)e^{-t^2}-2tQ(t)e^{-t^2}\Big)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t))Q(t)e^{-t^2}dt\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

Posons $C=-\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$ et $C(a,b)=-\displaystyle\int_a^b P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt$.

On a $\langle \varphi(P),Q\rangle = A-B=C$.

Faisons une intégration par parties ;

$u(t)=Q'(t)e^{-t^2} \Longrightarrow u'(t)=(Q''(t)-2tQ(t))e^{-t^2}$; $v'(t)=P'(t)\Longleftarrow v(t)=P(t)$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc

$$C(a,b)=-P(b)Q(b)e^{-b^2}+P(a)Q(a)e^{-a^2}+\int_a^b P(t)(Q''(t)-2tQ(t))e^{-t^2}dt.$$

En prenant la limite pour $a\to-\infty$ et $b\to+\infty$ et en utilisant les croissances comparées, on obtient

$C=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)(Q''(t)-2tQ(t))e^{-t^2}dt=\langle P,\varphi(Q)\rangle$. Or $C=\langle\varphi(P),Q\rangle$, donc

$$\boxed{\forall (P,Q)\in E^2,\ \langle \varphi(P),Q\rangle=\langle P,\varphi(Q)\rangle.\ \text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est symétrique}}$$

4–a)

$P_0=1$, donc $\deg(P_0)=0$.

$P_1=X-\dfrac{\langle P_0,X\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}P_0=X-\dfrac{\langle P_0,X\rangle}{\langle P_0,P_0\rangle}$.

On peut remarquer que $\langle P_0,X\rangle=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt=0$ car la fonction que l'on intègre est impaire. Donc $P_1=X$. Par suite $\deg(P_1)=1$.

Considérons la propriété $H_k : \forall i \in [\![0,k]\!],\ \deg(P_i) = i$ et montrons que H_k est satisfaite pour $k \in [\![0,n]\!]$.

H_0 et H_1 sont satisfaites d'après les points précédents.

Supposons H_k satisfaite pour un entier $k \leq n-1$. La propriété H_{k+1} sera alors satisfaite si $\deg(P_{k+1}) = k+1$.

Or $P_{k+1} = X^{k+1} - \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i$.

$\forall i \in [\![0,k]\!],\ \deg(P_i) = i$ d'après la propriété H_k, donc $\deg(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i) \leq k$. Il en résulte que $\deg(P_{k+1}) = \deg(X^{k+1}) = k+1$. La propriété H_{k+1} est satisfaite ; la propriété H_k est héréditaire ; par principe du raisonnement par récurrence, elle est satisfaite pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \deg(P_k) = k$; la famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est échelonnée en degrés, c'est une famile libre.

$$\boxed{\text{La famille } (P_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une famille libre de } n+1 \text{ vecteurs de l'espace } E \text{ de dimension } n+1 \text{ : c'est une base de } E}$$

4–b)

Cette situation ressemble fort à celle de l'orthogonalisation de Schmidt. Rappelons-la.

Dans un espace E euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$, on considère une famille libre de n vecteurs $(e_1)_{1\leq i\leq n}$.

On définit la famille de vecteurs $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de la manière suivante :

$$f_1 = \frac{1}{||e_1||} e_1 \text{ et pour } k \in [\![2,n]\!],\ f_k = \frac{1}{||e_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k\rangle f_i||} \Big(e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_i, e_k\rangle f_i\Big).$$

Le théorème de Schmidt indique que la famille $(f_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de E.

Dans notre cas, $P_0 = X_0$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} P_k &= X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle X^k, P_i\rangle}{\langle P_i, P_i\rangle} P_i \\ &= X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle X^k, P_i\rangle}{||P_i||^2} P_i \\ &= X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle X^k, \frac{1}{||P_i||} P_i\rangle \frac{1}{||P_i||} P_i \end{aligned}$$

On bien est dans la situation précédente avec $e_k = X^k$ et $f_i = \dfrac{1}{||P_i||} P_i$.

La famille $(\dfrac{1}{||P_i||} P_i)_{\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E donc

$$\boxed{\text{La famille } (P_i)_{0\leq i\leq n} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

4–c)

Notons que, d'après le cours, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \langle X^k, \frac{1}{||P_i||} P_i\rangle \frac{1}{||P_i||} P_i$ est le projeté orthogonal de X^k sur $\mathrm{vect}(P_0, \ldots, P_{k-1})$.

Nous avons vu, à la question 4–a), que $\deg(P_i) = i$, donc $\mathrm{vect}(P_0, \ldots, P_{k-1}) = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.