BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

**Code sujet : 281**

Concours d'admission de 2015

**Conception : ESSEC**

OPTION Scientifique

# MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai 2015, de 14 h. à 18 h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes :

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 1, $C^k([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $k$ fois dérivables sur le segment $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et dont les dérivées successives jusqu'à la $k$-ème sont continues.

Si $f$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty$ le nombre réel $\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Si $q$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $F(q)$ l'ensemble défini par : $F(q)=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R}) \,/\, \forall t\in[0,1], f''(t)=q(t)f(t)\}$.

## Introduction

1. a) Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   b) Pour toute fonction $f$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par :

   $$\Phi(f): t\in[0,1]\mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u)\,du.$$

   Vérifier que l'application $\Phi$, qui à $f$ associe $\Phi(f)$, est un endomorphisme de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   c) Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^2([0,1],\mathbb{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.

   d) En déduire pour toute fonction $f$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ :

   ($f$ appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0)=f'(0)=0$) si et seulement si $(\Phi(f)=f)$.

2. Soit $f$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0=f$ et, pour tout $n$ entier naturel, $f_{n+1}=\Phi(f_n)$.

   a) Montrer que : $\forall t\in[0,1]$, $|f_n(t)|\leq \|q\|_\infty^n\,\|f_0\|_\infty \dfrac{t^n}{n!}$.

   b) En déduire que, pour tout $t$ de $[0,1]$, la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   c) Montrer alors que si $f$ appartient à $F(q)$ et vérifie : $f(0)=f'(0)=0$, alors $f$ est nulle.

   d) Montrer que l'application $\Delta:\begin{cases} F(q)\to\mathbb{R}^2 \\ f\mapsto (f(0),f'(0)) \end{cases}$ est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$ ?

## Partie I : l'espace $E_a(\omega)$.

Soient $\omega$ une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives et $a$ un nombre réel. On note :

$$E_a(\omega)=\{f\in C^2([0,1],\mathbb{R}) /\ \forall t\in[0,1], f''(t)=-a\omega(t)f(t) \text{ et } f(0)=f(1)=0\}.$$

3. a) Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   b) Un exemple élémentaire : le cas $a=0$. Décrire $E_0(\omega)$.

4. Un exemple constructif : le cas $\omega$ est la fonction constante 1.

   a) Pour $a$ strictement négatif, remarquer que $t\mapsto \exp\left(\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ et $t\mapsto \exp\left(-\left(\sqrt{-a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour $a$ strictement négatif.

   b) Pour $a$ strictement positif, remarquer que $t\mapsto \cos\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ et $t\mapsto \sin\left(\left(\sqrt{a}\right)t\right)$ sont dans $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour $a$ strictement positif en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a}/\pi$.

5. On revient au cas général, montrer que : $\dim(E_a(\omega)) \leq 1$. On pourra faire intervenir encore l'application $\Delta$.
6. Montrer que : si $E_a(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors $a$ est strictement positif (on pourra introduire $\int_0^1 (f'(t))^2 dt$).
7. Lorsque $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose : $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t)dt$. Vérifier que cela définit bien un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite du problème, l'espace $C^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

   Pour $f$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$, on note : $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \omega(t)dt}$.
8. Si $a$ et $b$ sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

## Partie II : l'exemple $\omega = 1$.

Dans cette partie, $\omega$ est la fonction constante 1 et $p$ est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour tout $k$ entier naturel non-nul, on note $\psi_k$ la fonction définie par :
$\psi_k : t \in [0,1] \mapsto \sqrt{2}\sin(k\pi t)$.

9. a) Vérifier qu'il existe un nombre réel $a$ strictement positif tel que $\psi_k$ appartienne à $E_a(1)$.

   b) Pour tout couple $(k,l)$ dans $(\mathbb{N}^*)^2$, calculer : $\langle \psi_k|\psi_l\rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_l(t)dt$.

   c) On note $G$ le sous-espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ engendré par $(\psi_1,\ldots,\psi_p)$. Vérifier que $C = (\psi_1,\ldots,\psi_p)$ est une base orthonormée de $G$.

10. Pour $g$ élément de $G$, on définit la fonction $u(g)$ par : pour tout $t \in [0,1]$,

    $(u(g))(t) = 2\cos(\pi t)g(t) - \left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)dx\right)\psi_{p+1}(t)$.

    a) Montrer que $u : g \mapsto u(g)$ est un endomorphisme de $G$.

    b) Ecrire la matrice de $u$ dans la base $C$. Justifier que $u$ est diagonalisable.

11. a) Vérifier que, pour $g$ élément de $G$ : $\langle g|u(g)\rangle = 2\int_0^1 \cos(\pi t)g^2(t)dt$.

    b) Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$, montrer d'abord que $\lambda$ appartient au segment $[-2,2]$. Vérifier ensuite que $\lambda$ ne vaut ni $2$ ni $-2$ (on pourra raisonner par l'absurde).

12. Soient $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $\theta$ un nombre réel de $]0,\pi[$ tel que : $\lambda = 2\cos(\theta)$, on note $\psi$ un vecteur propre associé. Il existe un $p$-uplet de nombres réels $(x_1,\ldots,x_p)$ tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{p} x_k\psi_k$. On pose $x_0 = x_{p+1} = 0$.

    a) Vérifier que, pour tout $k$ dans $[\![1,p]\!]$, $x_{k+1} - 2\cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0$.



Tournez la page S.V.P.

b) En déduire l'existence d'un couple $(A,B)$ de nombres réels tel que, pour tout $k$ dans $[\![0,p+1]\!]$, $x_k = A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$.

c) Justifier que $A$ est nul et qu'il existe $s$ dans $[\![1,p]\!]$ tel que : $\theta = \dfrac{s\pi}{p+1}$.

d) En déduire les valeurs propres de $u$ et une base de vecteurs propres de $u$.

**Partie III : l'hypothèse $(H_\omega)$.**

On revient au cas général : $\omega$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives. On note $(H_\omega)$ l'hypothèse : Il existe une suite bornée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier $n$, $E_{a_n}(\omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse $(H_\omega)$ est-elle vérifiée si $\omega$ est la fonction constante 1 ? Justifier la réponse.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée.
Ainsi, on suppose qu'il existe $\omega$ une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives telle que l'hypothèse $(H_\omega)$ est réalisée ; on note $a$ un nombre réel positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels deux à deux distincts, tels que, pour tout entier $n$ : $E_{a_n}(\omega)\neq\{0\}$ et $0<a_n\leq a$.

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\in E_{a_n}(\omega)$ et $\int_0^1 (f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt=1$. Une telle suite est ainsi fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit $\varphi$ dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n$ entier naturel, on note :

$$c_n(\varphi)=\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt \text{ et } S_n(\varphi)=\sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)f_k.$$

a) Que représente $S_n(\varphi)$ ?

b) Vérifier que, pour tout $n$ entier naturel : $\|S_n(\varphi)\|_2^2=\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2$ et $\sum_{k=0}^{n}(c_k(\varphi))^2\leq\|\varphi\|_2^2$.

c) Que peut-on dire de la série $\sum_{n\geq0}(c_n(\varphi))^2$ ?

d) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\varphi(t)\omega(t)\,dt=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n''(t)\varphi(t)\,dt=0$.

16. a) Soit $x$ un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. On définit la fonction $\varphi_x$ par : $\varphi_x : t\in[0,1]\mapsto\begin{cases} t(x-1) & \text{si } t\in[0,x] \\ x(t-1) & \text{si } t\in\,]x,1]\end{cases}$. Vérifier que $\varphi_x$ est un élément de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

b) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $f_n$ à l'ordre 1 entre 0 et $x$. Vérifier que : $f_n(x)=xf_n'(0)+\int_0^x(x-t)f_n''(t)\,dt$, puis : $f_n'(0)=-\int_0^1(1-t)f_n''(t)\,dt$.

c) En déduire : $f_n(x)=\int_0^1 \varphi_x(t) f_n''(t)\,dt$ et conclure : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

d) Remarquer : $f_n(x)=-a_n\langle\varphi_x|f_n\rangle$, en déduire : $|f_n(x)|\leq a\|\varphi_x\|_2$.

e) Calculer $\int_0^1(\varphi_x(t))^2\,dt$, en déduire : $|f_n(x)|\leq ax(1-x)\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.

f) Justifier : $|f_n'(0)|\leq a\dfrac{\sqrt{\|\omega\|_\infty}}{\sqrt{3}}$.

g) Rappeler pourquoi on a : $f_n'(x)=f_n'(0)-a_n\int_0^x\omega(t)f_n(t)\,dt$ et en déduire alors : $|f_n'(x)|\leq a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$.

17. On note $C=a\sqrt{\dfrac{\|\omega\|_\infty}{3}}\left(1+\dfrac{a}{4}\|\omega\|_\infty\right)$ (on remarque que $C$ est un nombre réel strictement positif).

Déduire des questions précédentes : $\forall(x,y)\in[0,1]^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)-f_n(y)|\leq C|x-y|$.

18. Soit $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif, on choisit $N$ un entier naturel non-nul tel que : $\dfrac{1}{N}\leq\dfrac{\varepsilon}{2C}$ et on pose, pour $k$ dans $[\![0,N]\!]$ : $\alpha_k=\dfrac{k}{N}$.

a) Justifier qu'il existe un entier naturel $p$ tel que : $\forall n\geq p$, $\forall k\in[\![0,N]\!]$, $|f_n(\alpha_k)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) Soit alors $x$ un nombre réel fixé dans le segment $[0,1]$. En introduisant un entier $k$ de $[\![0,N-1]\!]$ tel que : $x\in[\alpha_k,\alpha_{k+1}]$, montrer que : $\forall n\geq p$, $|f_n(x)|<\varepsilon$.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty=0$.

d) Montrer alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1(f_n(t))^2\,\omega(t)\,dt=0$ et conclure.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

# ESSEC 2015 VOIE S

CORRIGE

## Introduction

### 1–a)

$F(q) \subset C^2([0,1],\mathbb{R})$ ; $F(q) \neq \emptyset$ car la fonction nulle appartient à $F(q)$.

$\forall (f,g) \in (F(q))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1],\ (f+\lambda g)''(t) &= f''(t) + \lambda g''(t)\\ &= q(t)f(t) + \lambda q(t)g(t) = q(t)(f(t)+\lambda g(t))\\ &= q(t)(f+\lambda g)(t)\end{aligned}$$

Conclusion : $f + \lambda g \in F(q)$.

$\boxed{F(q) \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^2([0,1],\mathbb{R}), \text{ donc un espace vectoriel}}$

### 1–b)

La linéarité de $\Phi$ résulte de la linéarité de l'intégration. D'autre part,

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1],\ \forall f \in F(q),\ (\Phi(f))(t) &= \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du\\ &= t\int_0^t q(u)f(u)du - \int_0^t uq(u)f(u)du\end{aligned}$$

Les fonctions $u \mapsto q(u)f(u)$ et $u \mapsto uq(u)f(u)$ sont continues sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions continues sur $[0,1]$. Par conséquent les applications

$t \mapsto \int_0^t q(u)f(u)du$ et $t \mapsto \int_0^t uq(u)f(u)du$ sont continues sur $[0,1]$.

Par différence de fonctions continues sur $[0,1]$,

$\boxed{\text{l'application } \Phi \text{ est continue sur } [0,1] \text{ ; c'est un endomorphisme de } C^0([0,1],\mathbb{R})}$

### 1–c)

$$\begin{aligned}\forall t \in [0,1],\ (\Phi(f))'(t) &= \int_0^t q(u)f(u)du + tq(t)f(t) - tq(t)f(t)\\ &= \int_0^t q(u)f(u)du.\end{aligned}$$

Donc $(\Phi(f))'$ est dérivable et

$\boxed{\forall t \in [0,1],\ (\Phi(f))''(t) = q(t)f(t). \text{ Par conséquent } \Phi(f) \in C^2([0,1],\mathbb{R})}$

**1–d)**

- Sens direct.

$f \in F(q) \Longrightarrow (\Phi(f))'' = f''$ d'après les calculs précédents.
De plus d'après les résultats précédents, $(\Phi(f))'(0) = (\Phi(f))(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
\forall f \in F(q),\ \forall t \in [0,1] \quad & \Longrightarrow (\Phi(f))''(t) = f''(t) \\
& \Longrightarrow \int_0^t (\Phi(f))''(u)du = \int_0^t f''(u)du \\
& \Longrightarrow (\Phi(f))'(t) - (\Phi(f))'(0) = f'(t) - f'(0) \\
& \Longrightarrow (\Phi(f))'(t) = f'(t) \quad \text{car } f'(0) = (\Phi(f))'(0) = 0 \\
& \Longrightarrow (\Phi(f))(t) - (\Phi(f))(0) = f(t) - f(0) \\
& \Longrightarrow (\Phi(f))(t) = f(t) \quad \text{car } \Phi(f)(0) = f(0) = 0
\end{aligned}$$

$$(f \in F(q),\ f'(0) = f(0) = 0) \Longrightarrow \Phi(f) = f.$$

- Réciproquement. $f \in C^0([0,1],\mathbb{R}) \Longrightarrow \Phi(f) \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ d'après les calculs du 1–b) ; donc $\Phi(f) = f \Longrightarrow f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$.

$(\Phi(f)(0) = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$.

$\Phi(f) = f \Longrightarrow \forall t \in [0,1],\ (\Phi(f))'(t) = f'(t)$. Donc $f'(0) = 0$ car $(\Phi(f))'(0) = 0$.

$(\Phi(f))'(t) = f'(t) \Longrightarrow (\Phi(f))''(t) = f''(t)$. Or d'après 1–c), $(\Phi(f))''(t) = q(t)f(t)$, donc $f''(t) = q(t)f(t)$

$$\Phi(f) = f \Longrightarrow f \in F(q),\ f(0) = f'(0) = 0$$

$$\boxed{f \in F(q),\ f(0) = f'(0) = 0 \Longleftrightarrow \Phi(f) = f}$$

**2–a)**

Procédons par récurrence ; soit $P_n$ la propriété : $\forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \le ||q||_\infty^n\, ||f_0||_\infty \dfrac{t^n}{n!}$.

Remarquons que $q$ et $f_0$ étant continues sur le segment $[0,1]$, elles y admettent un maximum et un minimum. Donc $||q||_\infty$ et $||f_0||_\infty$ existent.

- Pour $n = 0$.

$\forall t \in [0,1],\ |f_0(t)| \le ||f_0||_\infty \le ||q||_\infty^0\, ||f_0||_\infty \dfrac{t^0}{0!}$.

La propriété $P_0$ est satisfaite.

- Supposons $P_n$ satisfaite pour un entier naturel $n$ donné.

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(t)| &= \left| \int_0^t (t-u)q(u)f_n(u)du \right| \\
&\le \int_0^t |(t-u)q(u)f_n(u)|du \quad \text{car les bornes sont dans l'ordre croissant} \\
&\le \int_0^t |(t-u)|.|q(u)|.|f_n(u)|du \qquad \textbf{(2.a)}
\end{aligned}$$

Or $0 \le u \le t \Longleftrightarrow -t \le -u \le 0 \Longleftrightarrow 0 \le t-u \le t$, ce qui implique $|t-u| = t-u \le t \le 1$.

$|q(u)| \le ||q||_\infty$ ; par hypothèse de récurrence, $|f_n(u)| \le ||q||_\infty^n\, ||f_0||_\infty \dfrac{u^n}{n!}$

On a : $|t-u| \le 1,\ |q(u)| \le ||q||_\infty$ et $|f_n(u)| \le ||q||_\infty^n\, ||f_0||_\infty \dfrac{u^n}{n!}$

Comme il s'agit d'inégalités entre nombres positifs, on peut les multiplier termes à termes.

$|(t-u)|.|q(u)|.|f_n(u)| \le ||q||_\infty\, ||q||_\infty^n\, ||f_0||_\infty \dfrac{u^n}{n!} \Longleftrightarrow |(t-u)|.|q(u)|.|f_n(u)| \le ||q||_\infty^{n+1}\, ||f_0||_\infty \dfrac{u^n}{n!}$.

On intègre cette inégalité entre $0$ et $t$ (avec $0 \le t$),

$$\int_0^t |(t-u)|.|q(u)|.|f_n(u)|du \le \int_0^t ||q||_\infty^{n+1}\, ||f_0||_\infty \frac{u^n}{n!}du$$

D'après (2.a),

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(t)| &\le \int_0^t ||q||_\infty^{n+1} ||f_0||_\infty \frac{u^n}{n!} \\ &\le ||q||_\infty^{n+1} ||f_0||_\infty \int_0^t \frac{u^n}{n!} du \\ &\le ||q||_\infty^{n+1} ||f_0||_\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

C'est la propriété $P_{n+1}$. La propriété est héréditaire ; par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \le ||q||_\infty^n ||f_0||_\infty \frac{t^n}{n!}}$$

**2–b)**

On a $|f_n(t)| \le ||f_0||_\infty \dfrac{(||q||_\infty t)^n}{n!}$.

La série de terme général $\dfrac{(||q||_\infty t)^n}{n!}$ converge en tant que série exponentielle, par suite son terme généèral tend vers 0. $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_0||_\infty \dfrac{(||q||_\infty t)^n}{n!} = 0$.

$$\boxed{\text{Par encadrement } \forall t \in [0,1],\ \lim_{n\to+\infty} |f_n(t)| = 0, \text{ c'est-à-dire } \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0}$$

**2–c)**

$f_0 = f$ ; $f_1 = \Phi(f_0) = \Phi(f)$ ; $f_2 = \Phi(f_1) = \Phi^2(f)$.

Une récurrence facile donne $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \Phi^n(f_0) = \Phi^n(f)$.

D'après la question 1–d), si $f \in F(q)$ et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$, alors $\Phi(f) = f$.

On montre facilement que $\Phi(f) = f \implies \forall n \in \mathbb{N},\ \Phi^n(f) = f$, ce qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = f$

D'après 2–b), $\forall t \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, donc $\forall t \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(t) = 0$, ce qui veut dire $\forall t \in [0,1],\ f(t) = 0$, donc $f = 0$.

$$\boxed{\forall f \in F(q)\ /\ f(0) = f'(0),\ \text{ alors } f = 0}$$

**2–d)**

$$\begin{aligned}\forall (f,g) \in (F(q))^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Delta(f+\lambda g) &= ((f+\lambda g)(0), (f+\lambda g)'(0)) \\ &= (f(0)+\lambda g(0), f'(0)+\lambda g'(0)) \\ &= (f(0), f'(0)) + \lambda(g(0), g'(0)) \\ &= \Delta(f) + \lambda \Delta(g)\end{aligned}$$

$\forall f \in F(q),\ \Delta(f) = (0,0) \iff f(0) = f'(0) = 0$ ; donc $f = 0$ d'après le c).

L'application $\Delta$ est une application linéaire injective de $F(q)$ dans $\mathbb{R}^2$.

On sait que l'image par une application linéaire injective d'une famille libre est une famille libre.

Si $\dim F(q) \ge 3$, il existe dans $F(q)$ une famille libre d'au moins 3 éléments ; l'image de cette famille par $\Delta$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\dim F(q) \le 2}$$

Autre idée ; par le théorème du rang, $\dim F(q) = \dim \operatorname{Ker} \Delta + \dim \operatorname{Im} \Delta = \dim \operatorname{Im} \Delta$ puisque $\Delta$ est injective. Or $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}^2$, donc $\dim \operatorname{Im} \Delta \le 2$, ce qui donne le résultat