Voie E

EXERCICE 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

I - Une loi exponentielle et une suite

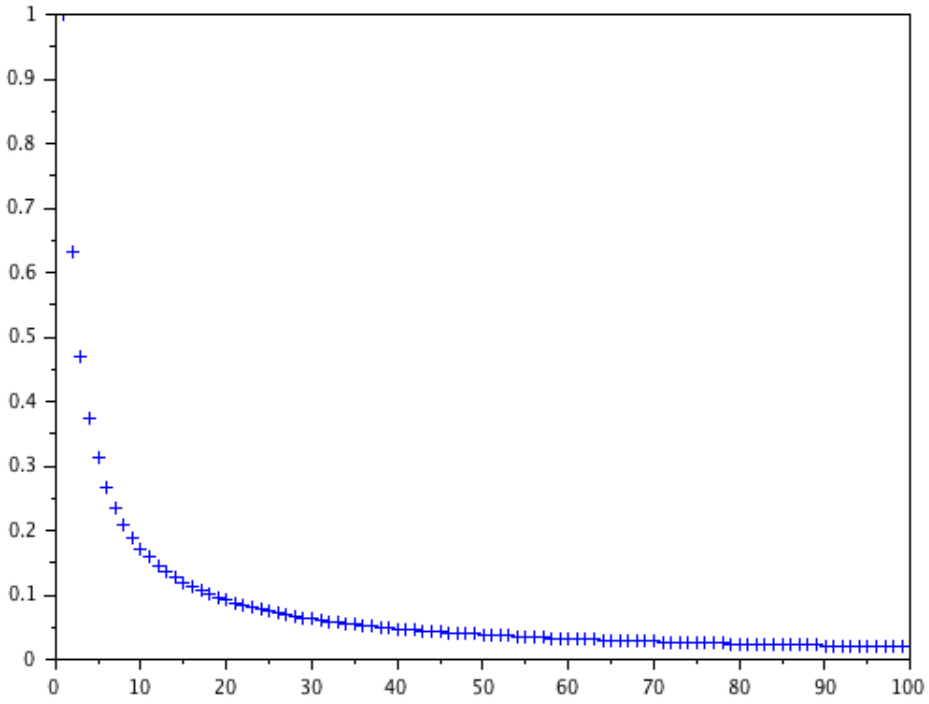
1. **Une loi exponentielle.**
   Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Donner une densité de X et rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X.
   (b) Redémontrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F définie pour tout réel x par :
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

2. **Étude d'une suite.**
   On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = F(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.
   Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
   (c) Recopier et compléter le programme SCILAB suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$:

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
        U(n+1) = ________________
end
plot(U,"+")
```


Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

(d) Le programme précédent complété permet d'obtenir la représentation graphique suivante :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la monotonie et la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

(e) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(f) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

(g) À l'aide de la question 2(a), montrer successivement que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}.$$

(h) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

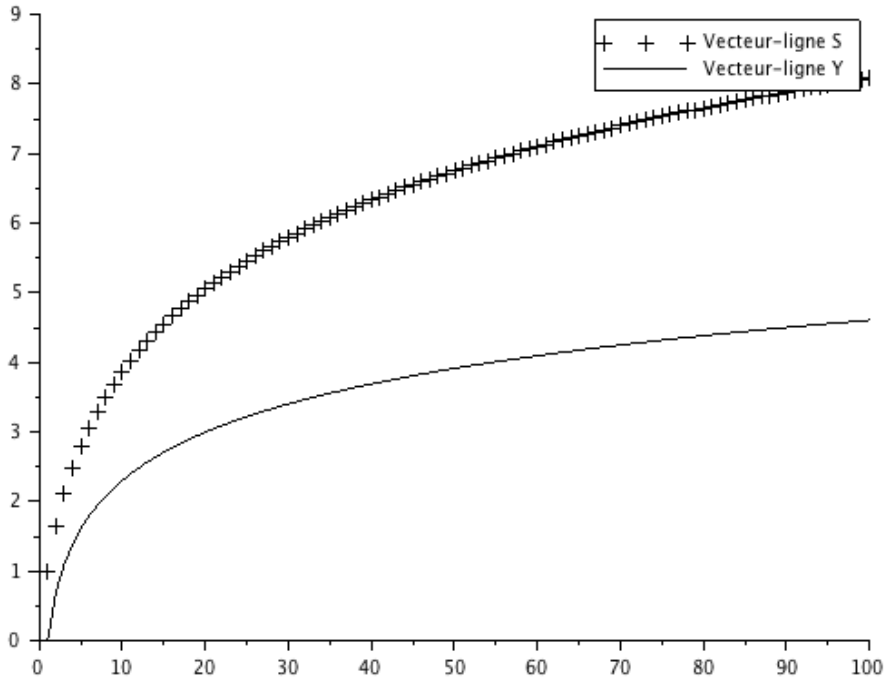
$$u_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

(i) On modifie le programme écrit en question 2(c) en remplaçant la dernière ligne par :

```
X = 1: 100
S = cumsum(U)
Y = log(X)
plot2d(X,S)
plot2d(X,Y)
```

Le programme ci-dessus permet d'obtenir la représentation graphique suivante :

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.



Que représente le vecteur-ligne `S` ?
Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série de terme général u_n ?

(j) A l'aide de la question 2(h), établir la nature de la série de terme général u_n.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. **Étude de la fonction** g.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
   (b) Donner le tableau de variations de g sur $[0, +\infty[$ (on précisera la limite de g en $+\infty$).
   (c) Étudier la convexité de g sur $]0, +\infty[$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   On précisera avec soin cette allure au voisinage du point d'abscisse 0 de la courbe. On rappelle que $e^{-1} \approx 0,37$.
2. **Étude de variables aléatoires**.
   (a) Montrer que la fonction g est une densité de probabilité.
   On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.
   (b) Sans calcul, justifier que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que pour tout réel x,
   $$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
   (d) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance, que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition notée H de la variable aléatoire Z.
   (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.
   (c) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

EXERCICE 2

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
3. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme φ_A.
4. L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) = \lambda M.$$

   Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
2. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
   On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
   Montrer que N et N' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ.
3. Comparer le spectre de l'endomorphisme φ_A et le spectre de la matrice A.
4. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

EXERCICE 3

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

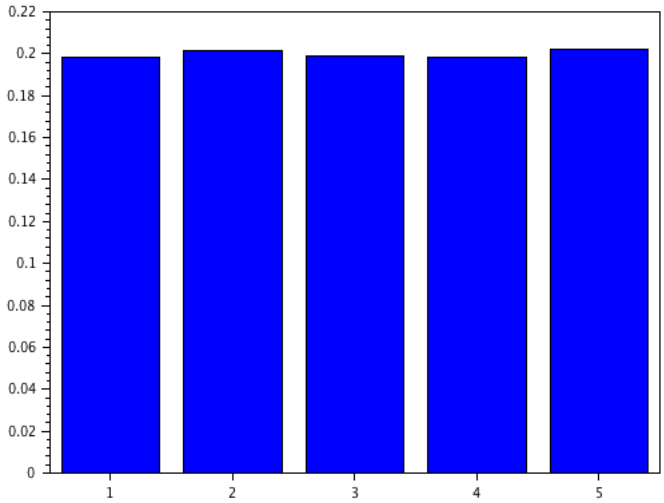
On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
- B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
   Recopier et compléter le programme SCILAB suivant pour qu'il affiche l'histogramme donnant la fréquence d'apparition du rang d'obtention de la boule noire :

```
N = input('Donner un entier naturel non nul') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i = 1 ;
        M = N ;
        while ________________
                i = i + 1 ;
                M = ________________ ;
        end
        S(i) = S(i) + 1 ;
end
disp(S / 10000)
bar(S / 10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
- C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

1. Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:
$$P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}.$$
2. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
(On distinguera les cas $j=N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).
3. Montrer que :
$$P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2N} & \text{si } j = N \end{cases}$$
4. Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T=4$ et $U=1$.

1. Préciser les valeurs prises par T.
2. Montrer soigneusement que pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$P(T=k) = \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$
3. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
4. (a) Calculer $P([U=1] \cap [T=2])$.
   (b) Calculer $P([U=1] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 3$.
5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.
   (a) Calculer $P([U=j] \cap [T=j+1])$.
   (b) Que vaut $P([U=j] \cap [T=k])$ pour tout entier $k \geqslant 2$ tel que $k \neq j+1$?
6. Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
7. Calculer $P(U=1)$ puis déterminer la loi de U.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

ECRICOME 2015 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE I

I–Une loi exponentielle et une suite

1–a)

Une densité f est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1–b)

$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Si $x < 0$, alors $t \leq x \Longrightarrow t < 0$, donc sur l'intervalle $]-\infty, x]$, $f(t) = 0$. Et par suite $F(x) = 0$.

Si $x \geq 0$, alors l'intervalle d'intégration $]-\infty, x]$ contient des réels négatifs et des réels positifs ou nuls. Utilisons la relation de Chasles pour les intégrales convergentes.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt \\ &= 0 + \int_{0}^{x} e^{-t}dt \\ &= \Big[-e^{-t}\Big]_{0}^{x} = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

Nous avons mis des inégalités larges car les deux expressions coïncident en 0 (De plus, on sait que F est continue en 0).

2–a)

Posons $g(x) = e^x - x - 1$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x - 1.$

$g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow e^x \geq 1 \Longleftrightarrow \ln e^x \geq \ln 1$ par stricte croissance de la fonction logarithme.

$g'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$. D'où les variations de g :

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Il apparaît clairement que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$. La fonction g admet un minimum absolu qui est atteint au point $x = 0$ uniquement.

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x + 1$ avec égalité si et seulement si $x = 0$

2–b)

Effectuons une récurrence. Soit $P(n)$ la propriété : $u_n > 0$.

Initialisation ; $u_0 = 1 > 0$ par hypothèse. La propriété est satisfaite pour $n = 0$.

Hérédité ; supposons la propriété satisfaite pour un entier naturel n donné.

$u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n}$ puisque $u_n > 0$. Or, par stricte croissance de l'exponentielle, $-u_n < 0 \Longrightarrow e^{-u_n} < 1$, donc $1 - e^{-u_n} > 0$. Ce qui veut dire $u_{n+1} > 0$.

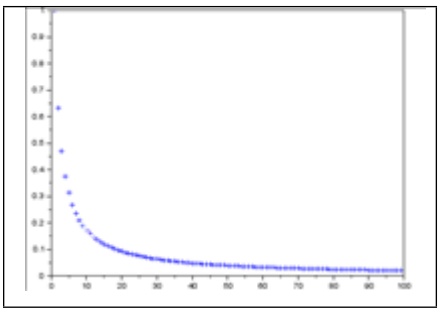
La propriété est héréditaire ; par principe du raisonnement par récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$

2–c)

U=zeros(1,100)
U(1)=1
for n=1:199
U(n+1)=1-exp(-U(n))
end
plot(U,"+")

Voici ce que donne le programme :



2–d)

On peut conjecturer que la suite est décroissante et de limite nulle.

2–e)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} &= u_n - F(u_n) \\ &= u_n - (1 - e^{-u_n}) \\ &= e^{-u_n} - 1 + (-u_n) \\ &= g(-u_n) \end{aligned}$$

Or $-u_n \neq 0 \Longrightarrow g(-u_n) > 0$ d'après la question 2–a), donc $u_n - u_{n+1} > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$: la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante (strictement)

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 21 pages.