Code sujet : 290

Concours d'admission de 2015

Conception : ESSEC

OPTION Economique

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai 2015, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

C'est en 1913 que F.W.Harris, ingénieur chez Westinghouse, établit une première formule très simple liée à un problème de gestion de stocks. C'est l'un des premiers exemples d'intervention des mathématiques dans le management, de solution d'un problème de « recherche opérationnelle » dans une entreprise.

Aujourd'hui, les modèles mathématiques sont très sophistiqués et en s'appuyant sur la puissance de calcul des ordinateurs du vingt-et-unième siècle, on peut les utiliser pour optimiser, au sens que l'on souhaite, la gestion de stocks.

Tournez la page S.V.P.

I. Mise en place du problème

En début de période, le stock contient déjà une quantité initiale de produit q_i (éventuellement nulle). Le gestionnaire peut alors s'il le souhaite commander une quantité q_c de produit, une seule fois, en début de période. Il n'y a pas de réapprovisionnement possible en cours de période.
La quantité totale $q = q_i + q_c$ est disponible à la vente pour toute la période à venir.
On définit dans ce problème les constantes strictement positives :

- prix de vente unitaire : v
  c'est le prix que rapporte chaque unité de produit vendue ;
- coût de stockage unitaire : k
  il s'applique à chaque unité de produit présente à un moment de la période dans le stock ;
- coût d'achat unitaire : c
  c'est le prix que coûte chaque unité de produit commandée en début de période ;
- coût fixe en cas d'achat : c_F
  ce coût forfaitaire s'applique uniquement s'il y a une commande passée en début de période.

Ces quatre constantes sont des réels strictement positifs, et on suppose de plus : $v > k + c$.

On introduit enfin les variables aléatoires réelles suivantes :

- D, la demande, c'est la quantité de produit qui est demandée durant la période. Sa loi est supposée connue.
- V, la quantité de produit que l'on vend pendant la période.
- B, le bénéfice net sur l'ensemble de la période.

On admet que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Pourquoi fait-on l'hypothèse $v > k + c$?

II. Optimisation du bénéfice moyen sur une période

A. Cas continu

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire D représentant la demande admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0]$, et continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

On note R la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $R(x) = \mathbb{P}(D > x)$.

Les quantités q_i et q_c sont des réels positifs ou nuls.

2. **Étude d'une fonction**
   On définit la fonction φ sur $[0, +\infty[$ par :
   $$\varphi(x) = v \int_0^x R(t)\,\mathrm{d}t - (k+c)x.$$
   (a) Montrer que R réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$.
   On pose dans la suite $S = R^{-1}\left(\dfrac{k+c}{v}\right)$.
   (b) Justifier l'existence et la dérivabilité de φ sur $[0, +\infty[$, et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
   (c) Déterminer les variations de φ sur $[0, +\infty[$.
   (d) En déduire : pour tout réel x positif et différent de S, $\varphi(x) < \varphi(S)$.
3. **Calcul approché de S avec Scilab**
   On suppose que l'on a défini une fonction d'entête `function r=R(x)` qui renvoie la valeur de R au point x. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Montrer que : $\mathbb{P}\left(R(X) \leqslant \dfrac{k+c}{v}\right) = \mathrm{e}^{-S}$.
   (b) Compléter le script Scilab qui suit, puis expliquer pourquoi il affiche une valeur approchée de S :

ii. Établir que pour tout $x \in [0, S[$: $\psi(x) = \varphi(S) - \varphi(x) - c_F$.

iii. En déduire que ψ est strictement décroissante sur $[0, S[$.

iv. Montrer que si $c_F \geqslant \varphi(S)$, alors ψ est négative sur $[0, S[$.
Quelle est la bonne stratégie dans ce cas ?

v. Montrer que si $c_F < \varphi(S)$, alors il existe un réel unique $r \in]0, S[$ en lequel ψ s'annule en changeant de signe.
En déduire que la bonne stratégie est de ne rien commander si $q_i \geqslant r$ et de compléter le stock jusqu'à S si $q_i < r$.

Conclusion de cette partie : on a mis en place une stratégie à deux seuils : r (seuil de renouvellement) et S (stock optimal). La stratégie consiste à ne rien commander si le stock initial est au moins égal à r, et sinon à acheter la quantité qui complète le stock à la valeur S.

B. Cas discret

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire D qui représente la demande est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Sa loi est définie par la donnée de la suite de nombres $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $p_n = \mathbb{P}(D = n)$.
On suppose que pour tout entier naturel n, $p_n > 0$.
On pose $R_n = \mathbb{P}(D \geqslant n)$.

Les quantités q_i, q_c sont maintenant des entiers naturels.

7. On définit la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\varphi_n = v\sum_{k=1}^{n} R_k - (k+c)n$ si $n \geqslant 1$ et $\varphi_0 = 0$.

   (a) Donner une relation entre p_n, R_n et R_{n+1} pour tout entier naturel n.

   (b) En déduire la monotonie de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et préciser R_0 ainsi que $\lim_{n\to\infty} R_n$.

   (c) Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ et en déduire qu'il existe un entier naturel S tel que φ_S soit la valeur maximale de la suite (φ_n).

8. **Calcul de S avec Scilab**
   On suppose que l'on a défini une fonction d'entête `function r=p(n)` qui renvoie la valeur de p_n.
   Compléter le script Scilab qui suit pour qu'il affiche $\varphi_0, ..., \varphi_S$ puis la valeur de S :

```
k=input('k=') ; c=input('c=') ; v=input('v=') ;
n=0 ; phi=0 ; R=1-p(0) ; disp(phi);

while R >= ... do
    n = n+1;
    phi = phi+...;
    disp(phi)
    R = R-...;
end

disp('S=');disp(n);
```

9. On rappelle que $V = \min(D, q)$ où $q = q_i + q_c$.

   (a) Montrer que V admet une espérance, donnée par : $E(V) = \sum_{n=0}^{q-1} np_n + qR_q$.

   (b) Établir : $E(V) = \sum_{n=1}^{q} R_n$.
   On pourra utiliser la formule établie à la question 7(a).

10. On note, comme dans la partie II, $\beta(q_i, q_c)$ l'espérance du bénéfice B en fonction de q_i et q_c.

    (a) Si $q_c = 0$, établir : $\beta(q_i, 0) = \varphi_{q_i} + cq_i$.

```
k=input('k=') ; c=input('c=') ; v=input('v=') ;

compt = 0;

for i=1:1000 do
    X=grand(1,1,"exp",1)
    if ...
        compt = compt+1;
    end
end

disp('S='); disp(-log(compt/1000));
```

4. **Espérance de vente**

La variable aléatoire V représente la quantité de produit vendue sur la période.
On rappelle que $q = q_i + q_c$ est la quantité de produit disponible à la vente.

Le minimum de deux réels a et b est noté dans la suite $\min(a, b)$.

(a) Justifier : $V = \min(D, q)$.

(b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \min(x, q)$.

i. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

ii. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^q xf(x)\,\mathrm{d}x$.

iii. Montrer que V admet une espérance, et que l'on a : $E(V) = \displaystyle\int_0^q xf(x)\,\mathrm{d}x + qR(q)$.

iv. À l'aide d'une intégration par parties, établir ensuite : $E(V) = \displaystyle\int_0^q R(x)\,\mathrm{d}x$.

5. **Bénéfice espéré**

Le bénéfice net sur la période est la variable aléatoire B. Ce bénéfice ne prend en compte que les dépenses et recettes de la période considérée. Par exemple, le coût d'achat du stock initial q_i n'est pas comptabilisé dans B, mais le coût de stockage de q_i l'est.

Les quantités autres que q_i et q_c sont considérées comme constantes, on propose par conséquent de noter $\beta(q_i, q_c) = E(B)$ l'espérance de B.

(a) Si on ne commande pas de produit ($q_c = 0$), exprimer B en fonction de v, V, k et q_i.
En déduire : $\beta(q_i, 0) = \varphi(q_i) + cq_i$.

(b) Si on commande une quantité q_c strictement positive de produit, exprimer B en fonction de v, V, k, c_F, q_i, q_c.
En déduire : pour $q_c > 0$, $\beta(q_i, q_c) = \varphi(q_c + q_i) + cq_i - c_F$.

6. **Optimisation**

On cherche à déterminer, en fonction d'une valeur donnée q_i du stock initial, quelle est la quantité de produit q_c à commander afin d'optimiser l'espérance de bénéfice.
On reprend les notations de la question 2 : S est le réel strictement positif en lequel la fonction φ est maximale.

(a) On suppose $q_i \geqslant S$.
Montrer que pour tout $q_c > 0$, $\beta(q_i, q_c) < \beta(q_i, 0)$.
En déduire que la meilleure stratégie est de ne pas acheter de produit.

(b) On suppose $q_i < S$.

i. Si on achète une quantité non nulle de produit, montrer que pour optimiser le bénéfice espéré on doit choisir $q_c = S - q_i$.
Autrement dit, on complète le stock à la quantité S.

On définit sur $[0, S[$ la fonction ψ par $\psi(x) = \beta(x, S - x) - \beta(x, 0)$.

(b) Si $q_c > 0$, établir : $\beta(q_i, q_c) = \varphi_{q_i+q_c} + cq_i - c_F$.

Les formules obtenues étant très analogues à celles de la partie A, on peut établir (ce que l'on ne demande pas de faire) que la stratégie à deux seuils reste valable dans le cas discret, les seuils étant alors des entiers.

(c) En utilisant le script de la question 8 pour certaines valeurs de k, c et v, on a obtenu les valeurs suivantes, arrondies à deux chiffres après la virgule, pour $\varphi_0, ..., \varphi_S$:

$$0 \quad 4 \quad 7,9 \quad 11,94 \quad 15,77 \quad 19,34 \quad 22,40 \quad 24,75 \quad 26,16 \quad 26,51$$

et $S = 9$. Sachant que $c_F = 2,5$, déterminer à partir de quelle valeur de q_i il est préférable de ne pas commander dans ce cas particulier.

III. Évolution du stock dans le temps

On cherche maintenant à modéliser l'évolution du stock sur plusieurs périodes, en se plaçant dans le cas discret. On introduit à cet effet une suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui représentent les demandes aux périodes successives $1, 2, 3, \ldots$. Ces variables sont supposées indépendantes et suivent toutes la même loi que la variable aléatoire D de la partie II.B. On reprend en particulier les notations $p_k = \mathbb{P}(D_n = k)$ et $R_k = \mathbb{P}(D_n \geqslant k)$, ainsi que l'hypothèse $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire prenant comme valeur l'état du stock en fin de période n (il s'agit donc aussi du stock initial de la période $n + 1$). On suppose qu'au début de la première période, le stock est vide, ce qui justifie la convention $X_0 = 0$ (variable aléatoire certaine).

On adopte la stratégie à deux seuils r et S (entiers, vérifiant $0 < r < S$) mise en place dans les parties précédentes, que l'on rappelle :

- Si au début d'une période le stock est supérieur ou égal à r, on ne commande rien.
- Si le stock initial est inférieur strictement à r, on le complète par une commande qui amène le stock à la valeur S.

Pour tout i et j dans $[\![0, S]\!]$, en supposant que le stock initial d'une période donnée est égal à j, on note $m_{i,j}$ la probabilité pour que le stock à la fin de la période soit égal à i.

On définit la matrice $M = (m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant S}$. On notera que les lignes et les colonnes de M sont numérotées à partir de 0.

11. Soit n un entier naturel.

 (a) Justifier que la variable aléatoire X_n est à valeur dans l'intervalle d'entiers $[\![0, S]\!]$.

 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors U_n la matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = S) \end{pmatrix}$$

 qui représente la loi de X_n.

 (b) Justifier que pour tout $i \in [\![0, S]\!]$: $\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}\mathbb{P}(X_n = j)$.

 En déduire : $U_{n+1} = MU_n$.

12. **Étude d'un cas particulier**

 Dans cette question, on suppose que les constantes k, v, c, c_F sont telles que les seuils sont $r = 2$ et $S = 3$.

 (a) Montrer que :

$$M = \begin{pmatrix} R_3 & R_3 & R_2 & R_3 \\ p_2 & p_2 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_1 & p_0 & p_1 \\ p_0 & p_0 & 0 & p_0 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, on note $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $d_n = \mathbb{P}(X_n = 3)$, de sorte que $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

(b) i. Vérifier que pour tout entier naturel n : $c_{n+1} = (p_0 - p_1)c_n + p_1$.

ii. En déduire une expression de c_n en fonction de p_0, p_1 et n.

iii. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite, notée γ, en fonction de p_0 et p_1.

(c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leur limite en fonction de p_0, p_1, p_2 et γ.

(d) Conclure que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.

13. **Existence et unicité d'une loi de probabilité invariante par M**
On reprend le cas général.

(a) Vérifier que tous les coefficients de la première ligne de M (c'est-à-dire $m_{0,j}$, pour j dans $[\![0, S]\!]$), sont strictement positifs.

(b) i. Montrer que pour tout $j \in [\![0, S]\!]$, $\sum_{i=0}^{S} m_{i,j} = 1$.

ii. Établir que 1 est une valeur propre de ${}^tM$ et préciser quel est un vecteur colonne propre associé à cette valeur propre.

iii. On rappelle le résultat du cours : toute matrice a le même rang que sa transposée.
Montrer que 1 est valeur propre de M.

(c) Soit U un vecteur colonne propre de M associé à la valeur propre 1.
Montrer qu'il existe un réel λ tel que la matrice colonne $V = \lambda U$, de coefficients $v_0, ..., v_S$, vérifie $MV = V$, $\sum_{j=0}^{S} |v_j| = 1$ et l'un au moins des coefficients de V est strictement positif.

(d) On suppose que V a aussi l'un au moins des ses coefficients qui est strictement négatif. Montrer que :

$$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j}v_j\right| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j}|v_j| \text{ et pour tout } i \in [\![1, S]\!], \quad \left|\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}v_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{i,j}|v_j|$$

et en déduire une contradiction, puis que les coefficients de V sont tous positifs.

(pour la première inégalité, on pourra poser $\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j}v_j\right| = \varepsilon\left(\sum_{j=0}^{S} m_{0,j}v_j\right)$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.)

(e) On suppose qu'il existe un deuxième vecteur colonne W, différent de V, vérifiant les mêmes propriétés que V.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $\alpha(V - W)$ vérifie aussi les mêmes propriétés que V. En déduire une contradiction. Que peut-on en déduire pour la dimension du sous espace propre de M associé à la valeur propre 1 ?

(f) On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.

Montrer que X vérifie $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X=0) \\ \mathbb{P}(X=1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X=S) \end{pmatrix} = V$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

ESSEC 2015 MATH III VOIE E

CORRIGE

I : mise en place du problème

1)

Si $v \leq k + c$, il n'y a aucun bénéfice à espérer ; la situation est invivable.

II : optimisation du bénéfice moyen sur une période

A. CAS CONTINU

2. Etude d'une fonction

2–a)

La fonction R est définie sur $[0, +\infty[$ par $R(x) = 1 - P(D \leq x) = 1 - F_D(x)$ si l'on note F_D la fonction de répartition de D. La densité f de D est continue sur $]0, +\infty[$, donc F_D est continue sur $[0, +\infty[$, car F_D est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité.

$$\forall x > 0, \;\; R'(x) = -f(x)$$

La fonction R est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$, à dérivée strictement négative ; donc R est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Par conséquent elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] \lim_{x \to +\infty} R(x), R(0)] =]0, 1]$;

en effet, $\lim_{x \to +\infty} F_D(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } R \text{ réalise une bijection strictement décroissante de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1]}$$

2–b)

La fonction R est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x R(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

De plus, elle est dérivable pour la même raison et sa dérivée est la fonction R.

La fonction $x \mapsto (k + c)x$ est dérivable en tant que fonction polynomiale, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions qui le sont.

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \geq 0, \;\; \varphi'(x) = vR(x) - (k + c)}$$

2–c)

$\varphi'(x) > 0 \iff vR(x) > k+c \iff R(x) > \dfrac{k+c}{v}$ car $v > 0$.

La fonction R est strictement décroissante, donc sa fonction réciproque est aussi strictement décroissante. Remarquons que $\dfrac{k+c}{v} \in]0,1]$. Donc

$R(x) > \dfrac{k+c}{v} \iff x < R^{-1}(\dfrac{k+c}{v}) \iff x < S$. D'où les variations de R.

x	0		S		$+\infty$
φ		$\nearrow$	$\varphi(S)$	$\searrow$	

2–d)

Sur $[0,S[$, φ est strictement croissante, donc $0 \leq x < S \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(S)$.
De même sur $]S,+\infty[$, φ est strictement décroissante, donc $S < x \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(S)$.

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ x \neq S \Longrightarrow \varphi(x) < \varphi(S)}$$

3. Calcul approché de S avec Scilab

3–a)

$P(R(X) \leq \dfrac{k+c}{v}) = P(X \geq R^{-1}(\dfrac{k+c}{v}) = P(X \geq S)$ car R^{-1} est strictement décroissante.

$$\begin{aligned} P(X \geq S) &= \int_S^{+\infty} e^{-t}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \int_S^x e^{-t}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \Big[-e^{-t}\Big]_S^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-S} - e^{x}\right) \\ &= e^{-S} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \leq \frac{k+c}{v}) = e^{-S}}$$

Remarque : pour les étudiants qui connaissent l'expression de la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$P(X \geq S) = 1 - P(X \leq S) = 1 - (1 - e^{-S}) = e^{-S}$.

3–b)

```
k=input('k= ') ; c=input('c= ') ; v=input('v=') ;
compt=0
for i=1:1000
X=grand(1,1,"exp",1)
        if R(X) <= (k+c)/v then
            compt=compt+1
        end
end
disp('S=') ; disp(-log(compt/1000)) ;
```

Explications.

grand('1,1,"exp",1) simule la loi exponentielle de paramètre 1, donc la loi de X.

On effectue 1000 simulations indépendantes ; le compteur compt augmente de 1 à chaque fois que l'évènement (R(X)≤ (k+c)/v) est réalisé.

A la fin des 1000 simulations, la variable compt a pris pour valeur le nombre de fois où cet événenement s'est réalisé. Par conséquent, compt/1000 est la fréquence de réalisation de l'évènement, donc une valeur approchée de la probabilité e^{-S} de l'évènement (R(X)≤ (k+c)/v), qui est aussi l'évènement (X≥ S).

La variable -log(compt/1000) est une valeur approchée de -log(e^{-S})=S.

4. Espérance de vente

4–a)

La variable V est la quantité de produit vendu au cours d'une période.

Si $D \leq q$, alors $V = D = \min(D, q)$.

Si $D > q$, alors $V = q$ (on ne peut pas vendre plus de produit que l'on en a en stock) ; donc $V = \min(D, q)$.

$$\boxed{V = \min(D, q)}$$

4–b)

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < q \\ q & \text{si} \quad x \geq q \end{cases}$$

i) La fonction g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, q[$ et $]q, +\infty[$, car sur ces intervalles g est une fonction polynomiale.

$g(q) = q$.

$\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x < q}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to q \\ x < q}} x = q = g(q)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to q \\ x > q}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to q \\ x > q}} q = q = g(q)$.

La fonction g est continue au point q. Donc

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R} - \{q\}, \text{ continue au point } q, \text{ donc } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

ii)

Sur $]0, q]$, $f(x) \geq 0$ et $x \leq q$, donc $0 \leq xf(x) \leq qf(x)$. **(4.b)**

La fonction f est une densité, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge, ce qui implique la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^q f(x)dx$ et par suite de l'intégrale $\displaystyle\int_0^q qf(x)dx$.

Par comparaison des fonctions continues, positives, l'encadrement (4.b) permet de conclure

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^q xf(x)dx \text{ est convergente}}$$

iii)

Par le théorème du transfert, sous réserve de convergence de l'intégrale,