BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : ÉCONOMIQUE

Mercredi 29 avril 2015, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

EXERCICE

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)v$.

1.a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $f \circ f = f$.

2. Déterminer le spectre de f.

3.a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}f$, si et seulement si $f(y) = y$.

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}f$ est inférieure ou égale à $n-1$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}f$.

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}f$. Quel est le rang de f ?

4.a) Déterminer une base du noyau de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME

Dans tout le problème :

- Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- On considère une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Partie I. Comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$.

L'objectif de cette partie est de comparer deux estimateurs sans biais et convergents du paramètre inconnu $\frac{1}{\lambda}$.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\quad \overline{X_n} = \frac{1}{n} Y_n$ et $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Rappeler sans démonstration les valeurs de l'espérance $E(X)$, de la variance $V(X)$ ainsi que l'expression de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

2. Calculer $E(\overline{X_n})$ et $V(\overline{X_n})$. En déduire que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

3.a) Montrer qu'une densité f_{M_n} de M_n est donnée par :

$$f_{M_n}(x) = \begin{cases} n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de l'espérance $E(M_n)$ de la variable aléatoire M_n.

c) En posant $z = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, justifier pour tout $a > 0$, l'égalité :

$$\int_0^a x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^{n-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{1-\mathrm{e}^{-\lambda a}} z^{n-1}\ln(1-z)\,\mathrm{d}z.$$

d) En déduire que l'on a : $E(M_n) = -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 z^{n-1}\ln(1-z)\,\mathrm{d}z$.

e) Montrer que la fonction $z \longmapsto (1-z)\big(1-\ln(1-z)\big)$ définie sur l'intervalle $[0,1[$, est une primitive de la fonction $z \longmapsto \ln(1-z)$.

À l'aide d'une intégration par parties, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre $E(M_{n+1})$ et $E(M_n)$.

f) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Déduire de la question précédente que $E(M_n) = \frac{1}{\lambda} u_n$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M'_n = \frac{M_n}{u_n}$ et $v_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$. *On admet* que $V(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} v_n$.

a) Calculer $E(M'_n)$ et $V(M'_n)$.

b) Justifier la convergence de la ~~série~~ suite de terme général v_n. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

c) Déduire des questions 4.a) et 4.b) que M'_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

d) Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \sum_{j=1}^{n}\left(x - \frac{1}{j}\right)^2$.

À l'aide de l'étude de Q, établir l'inégalité : $u_n^2 \leqslant n\,v_n$.

e) Comparer alors $V(M'_n)$ et $V(\overline{X_n})$. Conclure.

Partie II. Un exemple.

Les notations et le contexte sont ceux de la partie I.

Dans cette partie, on suppose que la durée de vie (en heures) d'un composant électronique est une variable aléatoire X à valeurs strictement positives suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

On suppose qu'en cas de panne, le composant électronique est immédiatement remplacé par un composant neuf dont la durée de vie est indépendante et de même loi que celle des composants précédents.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note X_j la variable aléatoire égale à la durée de vie du j-ème composant.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on constitue ainsi un n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que X.

On note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la réalisation du n-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on pose : $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.

5.a) Donner une interprétation de $\dfrac{1}{\lambda}$ · Dans quelle unité s'exprime $\dfrac{1}{\lambda}$?

b) Soit $p \in]0,1[$. Déterminer en fonction de p et λ, l'unique réel h_p pour lequel on a $P([X > h_p]) = p$.

c) Proposer un estimateur H_n sans biais et convergent pour le paramètre h_p.

d) On suppose que sur un échantillon de 100 composants, on a obtenu : $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = 10^5$ heures.

Donner une estimation de $h_{\frac{1}{2}}$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,7$).

6. *On admet sans démonstration* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable aléatoire Y_n est donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $t > 0$ un réel fixé et $N(t)$ la variable aléatoire égale au nombre de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $N(t)$.

b) Donner une estimation " naturelle " du nombre moyen de pannes dans l'intervalle $[0, t[$.

7. L'objectif de cette question est de déterminer un intervalle de confiance asymptotique du paramètre inconnu $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

a) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et soit t_1 et t_2 deux réels vérifiant $\Phi(t_1) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ et $\Phi(t_2) = \dfrac{\alpha}{2}$. Montrer que $t_2 = -t_1$.

b) On pose : $R_n = \sqrt{n}(\lambda \overline{X}_n - 1)$. Justifier que la suite de variables aléatoires $(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P([-t_1 \leqslant R_n \leqslant t_1]) = 1 - \alpha$.

d) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.

e) Que se passe-t-il lorsque α est proche de 0 ou lorsque α est proche de 1 ?

f) Pour $\alpha = 0,05$, on donne $t_1 \simeq 2$. Montrer qu'avec l'échantillon de la question 5.d), la réalisation de l'intervalle de confiance asymptotique de $\dfrac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance 0,95 est : $[833, 1250]$.

Partie III. Un résultat asymptotique.

Les notations et le contexte sont ceux des parties précédentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = M_n - \frac{1}{\lambda}\ln n$ et on note F_{T_n} la fonction de répartition de T_n.

8.a) Montrer que pour tout x réel, on a : $F_{T_n}(x) = \left(F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln n\right)\right)^n$.

b) Pour chaque réel x fixé, déterminer un entier naturel N_x (qui dépend de x) tel que pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $x + \frac{1}{\lambda}\ln n > 0$.

En déduire que pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $F_X\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln n\right) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{n}$.

c) Montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{T_n}(x) = \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

9. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que : $F(x) = \exp\left(-\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)$.

a) Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,1[$.

b) En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera ; on dit que T *suit la loi de Gumbel de paramètre* λ.

c) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la variable aléatoire T.

10.a) Établir l'existence de l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

b) On pose : $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T sont de même loi.

c) Justifier l'égalité : $E(T) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$.

d) À l'aide de la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, établir l'inégalité : $E(T) \geqslant 0$.

11. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

a) Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.

b) On considère le programme *Scilab* suivant :

```
x=linspace(-2,2,400) ; y=(exp(-exp(-x))) ; plot(x,y), plot(y,x)
```

(*i*) Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2,2,400)` ?

(*ii*) Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme ?

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?

d) Établir l'inégalité : $E(T) \leqslant 1$.

e) Par une méthode de votre choix, écrire en *Scilab* les commandes qui permettent de simuler la loi de T.

f) Écrire en *Scilab* les commandes qui permettent de renvoyer une valeur numérique approchée de $E(T)$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1179 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2015

HEC 2015 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

1–a)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\alpha x + y &= (\alpha x_1 + y_1, \dots, \alpha x_n + y_n)\\
f(\alpha x + y) &= \alpha x + y - \Big(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + y_i)\Big) v\\
&= \alpha x + y - \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) v - \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) v\\
&= \alpha\Big(x - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) v\Big) + y - \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i\Big) v
\end{aligned}$$

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)\ ;\ f \text{ est linéaire} \qquad \textbf{(i)}$$

De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x)$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs x et v de $\mathbb{R}^n$, donc

$$f(x) \text{ appartient à } \mathbb{R}^n \qquad \textbf{(ii)}.$$

$$\boxed{\text{D'après les points (i) et (ii), } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$$

1–b)

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f \circ f(x) &= f(f(x))\\
&= f\Big(x - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) v\Big)\\
&= f(x) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) f(v)
\end{aligned}$$

Or, si l'on écrit $v = (v_1, \dots, v_n)$, $f(v) = v - \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\Big) v = v - v = 0$ car par hypothèse, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$. Par suite $f(x) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) f(v) = f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f \circ f(x) = f(x) \iff f \circ f = f}$$

2)

$f \circ f = f \iff f \circ f - f = \Theta$ (endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$).

Le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de f. D'après le cours, les valeurs propres possibles de f sont des racines de ce polynôme.

Les racines de ce polynôme sont 0 et 1 car $X^2 - X = X(X-1)$.

$$\text{spect}(f) \subset \{0, 1\}$$

• On a vu que $f(v) = 0 = 0v$. Le vecteur v est non nul puisque la somme de ses coordonnées vaut 1. Cela prouve que 0 est valeur propre de f et que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

• Regardons si 1 est valeur propre, c'est-à-dire s'il existe un vecteur x non nul tel que $f(x) = x$.

L'expression générale de $f(x)$ est $f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)v$. Il suffit d'avoir $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Comme $n \geq 2$, on peut prendre $x = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Donc 1 est valeur propre de f. Conclusion :

$$\boxed{\text{spect}(f) = \{0, 1\}}$$

3–a)

Notons I l'ensemble I des vecteurs invariants par f ; $I = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) = x\}$.

∗ Si $y = f(y)$, alors y appartient à $\operatorname{Im} f$ car y est sa propre image.

est inclus dans l'image de f : $I \subset \operatorname{Im} f$

∗ Réciproquement, si y appartient à $\operatorname{Im} f$, il existe x dans $\mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Donc $f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x)$ (puisque $f \circ f = f$), donc $f(y) = y$.

Ceci prouve que : $\operatorname{Im} f \subset I$. Par conséquent,

$$\boxed{I \subset \operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Im} f \subset I \text{ équivaut à } I = \operatorname{Im} f}$$

3–b)

Il y a plusieurs façons de répondre à cette question.

∗ D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \iff n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

D'après la question 2), on a vu que $f(v) = 0$; cela veut dire que $v \in \operatorname{Ker} f$. Or $v \neq 0$, donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$: $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.

Par suite $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f \leq n - 1$.

∗ Puisque f est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie n, d'après le cours, il y a équivalence entre f bijectif, f injectif, f surjectif ; il y a donc aussi équivalence entre les contraires de ces propositions, à savoir entre f non bijectif, f non injectif, f non surjectif. Or on sait que f n'est pas injectif toujours d'après la question 2), donc f n'est pas surjectif. Cela se traduit par $\operatorname{Im} f$ strictement incluse dans $\mathbb{R}^n$. Donc $\dim \operatorname{Im} f < n$ soit $\dim \operatorname{Im} f \leq n - 1$.

∗ On pouvait aussi raisonner par l'absurde. Si $\dim \operatorname{Im} f = n$, alors comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^n$, on en déduit $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, on a $I = \mathbb{R}^n$. Cela est manifestement faux car, par exemple, $f(v) = 0 \neq v$.

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} f \leq n - 1}$$

3–c)

Remarquons que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $e_i - e_{i+1}$ est 1 et la $(i+1)^{\text{ème}}$ est -1, les autres sont nulles. Par suite la somme des coordonnées de $e_i - e_{i+1}$ est nulle. Il en résulte que $f(e_i - e_{i+1}) = e_i - e_{i+1} + 0.v = e_i - e_{i+1}$. D'après la question 3–a),

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ e_i - e_{i+1} \in \operatorname{Im} f}$$

3–d)

Regardons si la famille $\{e_i - e_{i+1},\ \leq i \leq n-1\}$ est libre.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(e_i - e_{i+1}) = 0$. Cette égalité s'écrit

$\alpha_1(e_1 - e_2) + \alpha_2(e_2 - e_3) + \cdots + \alpha_{n-1}(e_{n-1} - e_n) = 0$, puis

$$\alpha_1 e_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)e_2 + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n. \qquad \textbf{(3d)}$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'égalité précédente équivaut à :

$$\begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & = 0 \\ \quad\vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} & = 0 \\ \alpha_{n-1} & = 0 \end{cases}$$

La résolution est immédiate : en effet, $\alpha_1 = 0$, donc la deuxième équation donne $\alpha_2 = 0$, puis $\alpha_3 = 0$ et ainsi de suite l'avant-dernière ligne donne $\alpha_{n-1} = 0$ ainsi que la dernière. On obtient donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\} \text{ est libre}}$$

Remarque : on peut obtenir rigoureusement l'égalité (3d).

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(e_i - e_{i+1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} \\ &\quad \text{on pose } k = i+1 \text{ dans la seconde somme, donc } i = k-1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{k=2}^{n} \alpha_{k-1} e_k \\ &= \alpha_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i e_i - \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_{i-1} e_i - \alpha_{n-1} e_n \qquad \text{l'indice } k \text{ est muet} \\ &= \alpha_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) e_i - \alpha_{n-1} e_n \end{aligned}$$

Revenons à la question : la famille $\{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\operatorname{Im} f$ (d'après la question 2–c) ; $\dim \operatorname{Im} f \leq n-1$ d'après la question 3–b). On sait d'après le cours que , si E est un espace de dimension N, alors toute famille de plus de N vecteurs de E est liée ; les familles libres d'un tel espace ont, au plus, N éléments. Par conséquent la dimension de $\operatorname{Im} f$ ne peut être strictement inférieure à $n-1$, puisque la famille $\{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\operatorname{Im} f$. Comme $\dim \operatorname{Im} f \leq n-1$, il ne reste plus que $\dim \operatorname{Im} f = n-1$.

Dans ces conditions, la famille $\{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs dans un espace de dimension $n-1$, c'en est une base.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dim \operatorname{Im} f = n-1 \iff \operatorname{rang}(f) = n-1. \\ \text{La famille } \{e_i - e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n-1\} \text{ est une base de } \operatorname{Im} f \end{array}}$$

4–a)

D'après le théorème du rang : $n = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$; on déduit $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Or on sait que $v \neq 0$ appartient à $\operatorname{Ker} f$ (voir la question 3–b), donc la famille constituée par le vecteur v est une famille libre de 1 vecteur dans un espace de dimension 1 : c'en est donc une base.

$$\boxed{\text{La famille } (v) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$$

4–b)

Désignons par $E(\lambda, f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

On a vu à la question 2) que $\operatorname{spect}(f) = \{0, 1\}$.

On sait que $E(0, f) = \operatorname{Ker} f$ et on a vu à la question 3–a) que $\operatorname{Im} f = E(1, f)$

$$\boxed{E(0, f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(v) \ ; \ E(1, f) = \operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_i - e_{i+1}), \ 1 \leq i \leq n-1}$$

4–c)

$\operatorname{spect}(f) = \{0, 1\}$; $\dim E(0, f) = 1$ et $\dim E(1, f) = n - 1$.

$$\boxed{\dim E(0, f) + \dim E(1, f) = n = \dim \mathbb{R}^n \ : \ f \text{ est diagonalisable}}$$

C'est une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

5)

Soit e_j un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ce vecteur a toutes ses coordonnées nulles sauf la j ème qui vaut 1. Par suite la somme de ses coordonnées vaut 1.

$f(e_j) = e_j - 1.v = e_j - v$. La colonne des coordonnées de ce vecteur dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est : $\begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_{j-1} \\ 1 - v_j \\ -v_{j+1} \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

Cette colonne constitue la j ème colonne de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, la matrice M de f est $M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & -v_2 \\ -v_3 & -v_3 & 1 - v_3 \end{pmatrix}$

Dans le cas général,

$$M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & -v_1 & \dots & -v_1 & \dots & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & -v_2 & & & & -v_2 \\ -v_3 & -v_3 & \ddots & & & & -v_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 - v_j & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -v_n & -v_n & & & -v_n & \dots & 1 - v_n \end{pmatrix}$$

Rappelons que f est diagonalisable ; on obtient donc une base de $\mathbb{R}^n$ en concaténant (ou en mettant bout à bout) des bases de chacun des sous-espaces propres.

Prenons (v) pour base de $E(0, f) = \operatorname{Ker} f$ et $(e_1 - e_2, \dots, e_i - e_{i+1}, \dots, e_{n-1} - e_n)$ pour base de $\operatorname{Im} f = E(1, f)$.

Une base B' de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de f est
$(v, e_1 - e_2, \ldots, e_i - e_{i+1}, \ldots, e_{n-1} - e_n)$. Dans cette base la matrice de f est

$$\boxed{M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEME

Partie I : comparaison de deux estimateurs de $\frac{1}{\lambda}$

1)

$$\boxed{\begin{gathered} E(X) = \frac{1}{\lambda},\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \end{gathered}}$$

Les inégalités peuvent être prises au sens large, ce que nous avons fait, car les deux expressions coïncident pour $x = 0$; mais il ne faut bien sûr pas les prendre au sens strict toutes les deux car F_X ne serait pas définie au point $x = 0$!

2)

Par linéarité de l'espérance, $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times \frac{1}{\lambda}$ car les variables X_i suivent la même loi que X.

$$\boxed{E(\overline{X}_n) = \frac{1}{\lambda}}$$

Les variables X_i sont indépendantes, donc
$V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2} V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \frac{1}{\lambda^2}$.

$$\boxed{V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n\lambda^2}}$$

La variable $\overline{X}_n$ est une fonction des n variables X_i, indépendantes, de même loi ; cette loi dépend du paramètre $\frac{1}{\lambda}$, donc $\overline{X}_n$ est un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\begin{gathered} E(\overline{X}_n) = \frac{1}{\lambda}, \text{ donc } \overline{X}_n \text{ est un estimateur sans biais de } \frac{1}{\lambda} \\ \lim_{n \to +\infty} V(\overline{X}_n) = 0 : \text{cet estimateur est convergent} \end{gathered}}$$

Remarque : en toute rigueur on devrait dire " la suite d'estimateurs $(\overline{X}_n)$ est convergente, ce que nous ne ferons pas.

3–a)

- Déterminons la fonction de répartition de M_n.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \le x)\\ &= P\Big((X_1 \le x) \cap (X_2 \le x) \cap \dots \cap (X_n \le x)\Big)\\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) \quad \text{car les variables } X_i \text{ sont indépendantes}\\ &= \Big(P(X \le x)\Big)^n \quad \text{car les variables suivent la même loi que } X\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{M_n}(x) = \Big(F_X(x)\Big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ (1-e^{-\lambda x})^n & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}}$$

Rappel : la fonction de répartition d'une variable à densité est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.

La fonction F_{M_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que fonction nulle.

La fonction F_{M_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que puissance enième > 0 d'une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1-e^{-\lambda x})^n = 0 = F_{M_n}(0)$. De plus, il est évident que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 0 = 0$, donc la fonction F_{M_n} est continue en 0 ; avec ce que l'on vient de dire, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

En résumé, la fonction de répartition de M_n est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, c'est une fonction répartition d'une variable à densité : conclusion,

M_n est une variable à densité.

Rappel : dans ces conditions, on peut prendre pour densité $f_{M_n} = F'_{M_n}$ là où F_{M_n} est dérivable (dans le cas présent sur $\mathbb{R}^*$) et là où F_{M_n} n'est pas dérivable, on peut prendre pour f_{M_n} n'importe quelle valeur positive où nulle. Nous choisissons de prendre $f_{M_n}(0) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}}$$

Remarquons que lorsque $n \ge 2$, $n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$ est nul pour $x = 0$ $\big($car $n-1 \ge 1\big)$. On peut alors mettre une inégalité large dans la deuxième expression.

3–b)

$E(M_n)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)dx$ converge absolument, si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f_{M_n}(x)dx$ converge absolument, si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f_{M_n}(x)dx$ converge puisque sur $\mathbb{R}_+$, $x f_{M_n}(x) \ge 0$.

Donc $E(M_n)$ existe si et seulement si l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}dx$ converge.

Posons $g_n(x) = \lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions continues, elle est positive ou nulle car $f_{M_n}(x) \ge 0$ ainsi que x.

L'intégrale I est impropre uniquement en $+\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-e^{-\lambda x})^{n-1} = 1$, donc $(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Il en résulte que

$n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} n\lambda x e^{-\lambda x}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}dx$ converge (et vaut $\frac{n}{\lambda}$) d'après les résultats sur la loi exponentielle de paramètre λ.