



EXERCICES D'INFORMATIQUE



INFORMATIQUE
ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-25

1) _____

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier cette suite : existence, monotonie, convergence et limite éventuelle

2) _____

Ecrire une fonction `courbe(a,b)` qui trace la courbe de f et la bissectrice entre deux réels a et b .

3) _____

Ecrire une fonction `dessin(u)` qui

- affecte à n la valeur 5,

- construit la matrice $A = \begin{pmatrix} u_0 & u_0 & u_1 & u_1 & \dots & u_k & u_k & \dots & u_n & u_n \\ 0 & u_1 & u_1 & u_2 & \dots & u_k & u_{k+1} & \dots & u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$

- trace la ligne brisée des points A_k de coordonnées (u_k, u_k) et des points A'_k de coordonnées (u_k, u_{k+1}) et la bissectrice dans le même repère.

4) _____

Représenter dans le même repère la ligne brisée, la bissectrice et la courbe entre deux réels a et b .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 25

1)

Etudions rapidement la fonction f . Elle est définie, continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que fraction rationnelle, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x > 0, f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}$$

D'où le tableau de variations de f .

x	0
$f'(x)$	-
f	4 ↘ 1

Il apparaît que $\forall x > 0, f(x) > 0$.

Une récurrence facile montre que $\forall n \geq 0, u_n$ existe et $\forall n \geq 1, u_n > 0$.

La fonction f est décroissante sur \mathbb{R}_+ ; $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, donc la suite n'est pas monotone.

Posons $v_n = u_{2n}$; on aura $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$. La fonction $g = f \circ f$ est croissante (composée de deux fonctions croissantes), la suite (v_n) est monotone.

D'après le tableau de variations de f , $u_n \in [1, 4]$ pour $n \geq 1$; la suite (v_n) est majorée par 4, elle converge donc vers un réel $\ell \in [1, 4]$.

Détermination de ℓ . Puisque g est continue sur \mathbb{R}_+ par composition ; g est une fraction rationnelle définie sur \mathbb{R}_+ comme nous allons le vérifier à l'instant.

Par suite, ℓ est solution de $g(x) = x$ avec $x \in [1, 4]$.

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, g(x) &= \frac{f(x) + 4}{f(x) + 1} \\ &= \frac{\frac{x+4}{x+1} + 4}{\frac{x+4}{x+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{5x+8}{x+1}}{\frac{x+4}{x+1} + 1} \\ &= \frac{5x+8}{2x+5} \\ g(x) - x &= \frac{5x+8}{2x+5} - x \\ &= 2\frac{4-x^2}{2x+5} \end{aligned}$$

Cette équation a une seule solution sur $[1, 4]$: c'est 2.

La suite (v_n) converge vers 2.

La même démonstration montre que la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{2n+1}$ converge aussi vers 2.

Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs convergent vers une même limite.

La suite (u_n) est convergente vers $\ell = 2$

On peut remarquer que le réel 2 est aussi le point fixe de la fonction f .