INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–25

1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et la realtion

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$$

Etudier cette suite : existence, monotonie, convergence et limite éventuelle

2)

Ecrire une function courbe(a,b) qui trace la courbe de f et la bissectrice entre deux réels a et b.

3)

Ecrire une fonction dessin(u) qui

– affecte à n la valeur 5,

– construit la matrice A= $\begin{pmatrix} u_0 & u_0 & u_1 & u_1 & \dots & u_k & u_k & \dots & u_n & u_n \\ 0 & u_1 & u_1 & u_2 & \dots & u_k & u_{k+1} & \dots & u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$

– trace la ligne brisée des points A_k de coordonnées (u_k, u_k) et des points A'_k de coordonnées (u_k, u_{k+1}) et la bissectrice dans le même repère.

4)

Représenter dans le même repère la ligne brisée, la bissectrice et la courbe entre deux réels a et b.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 25

1)

Etudions frapidement le fonction f. Elle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que fraction rationnelle, le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x >> 0, \ f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}$$

D'où le tableau de variations de f.

x	0	
$f'(x)$	$-$	
f	4 $\searrow$	1

Il apparaît que $\forall x > 0, \ f(x) > 0$.

Une récurrence facile montre que $\forall n \geq 0, \ u_n$ existe et $\forall n \geq 1, \ u_n > 0$.

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$; $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq 0$, donc la suite n'est pas monotone.

Posons $v_n = u_{2n}$; on aura $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$. La fonction $g = f \circ f$ est croissante (composée de deux fonctions croissantes), la suite (v_n) est monotone.

D'après le tableau de variations de f, $u_n \in [1, 4]$ pour $n \geq 1$; la suite (v_n) est majorée par 4, elle converge donc vers un réel $\ell \in [1, 4]$.

Détermination de ℓ. Puisque g est continue sur $\mathbb{R}_+$ par composition ; g est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}_+$ comme nous allons le vérifier à l'instant.

Par suite, ℓ est solution de $g(x) = x$ avec $x \in [1, 4]$.

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0, \ g(x) &= \frac{f(x)+4}{f(x)+1} \\
&= \frac{\dfrac{x+4}{x+1}+4}{\dfrac{x+4}{x+1}+1} \\
&= \frac{5x+8}{2x+5} \\
g(x) - x &= \frac{5x+8}{2x+5} - x \\
&= 2\frac{4-x^2}{2x+5}
\end{aligned}$$

Cette équation a une seule solution sur $[1, 4]$: c'est 2.

La suite (v_n) converge vers 2.

La même démonstration montre que la suite (w_n) définie par : $\forall n \subset \mathbb{N}, \ w_n = u_{2n+1}$ converge aussi vers 2.

Les deux suites extraites d'indices pairs et impairs convergent vers une même limite.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente vers } \ell = 2}$$

On peut remarquer que le réel 2 est aussi le point fixe de la fonction f.