



## EXERCICES D'INFORMATIQUE



### INFORMATIQUE

### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-15

On se donne un réel strictement positif  $\lambda$  et une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables binomiales telles que  $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ . On se donne aussi une variable  $Y$  telle que  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

On sait que  $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$ .

Mais ce théorème ne dit pas si, pour un entier  $n$  fixé,  $P(Y = k)$  est une bonne approximation de  $P(X_n = k)$ .

Pour le savoir, nous allons faire une étude numérique et en tirer une règle empirique.

1) \_\_\_\_\_

Ecrire une fonction  $Y=B(n,\lambda)$  qui calcule  $b_k=P(X_n = k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et donne en sortie  $Y=[b_0, b_1, \dots, b_n]$

2) \_\_\_\_\_

Ecrire une fonction  $Y=P(n,\lambda)$  qui calcule  $p_k=P(Y=k)$  pour tout  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$  et donne en sortie  $Y=[p_0, p_0, \dots, p_n]$ .

3) \_\_\_\_\_

Faire tracer les diagrammes en barres (ou en bâtons) des valeurs  $P(X_n = k)$  et  $P(Y = k)$  des lois de  $X_n$  et de  $Y$  pour  $0 \leq k \leq 30$  dans les cas suivants :

i)  $\lambda = 1, n = 10$ , puis  $n = 30$ , puis  $n = 50$ .

ii)  $\lambda = 4, n = 10$ , puis  $n = 30$ , puis  $n = 50$ .

4) \_\_\_\_\_

Conclusion ?

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 15

1)

Rappelons que, si  $X$  suit la binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  alors

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p.$$

Pour  $k + 1 \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} &= \frac{\binom{n}{k + 1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n! k! (n - k)! p^{k+1} q^{n-k-1}}{(k + 1)! (n - k - 1)! n! p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n - k}{k + 1} \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Pour  $k = n$ ,  $P(X = n) = p^n$ .

Nous avons donc une relation de récurrence entre  $p_{k+1} = P(X = k + 1)$  et  $p_k = P(X = k)$ . Cette relation est

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, p_{k+1} = p_k \times \frac{p(n - k)}{(k + 1)q}; \text{ décalons d'une cran :}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_k = \frac{p(n - k + 1)}{kq} p_{k-1} \text{ et } p_0 = q^n$$

Nous allons stocker ces valeurs dans une matrice  $Y \in \mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbb{R})$  en remarquant que  $Y(k + 1) = p_k$ .

Pour des commodités d'écriture, nous noterons  $p = \frac{\lambda}{n}$ .

function Y=B(n,lambda)

Y=zeros(1,n+1) // matrice ligne de longueur n+1 formée de zéros

p=lambda/n

q=1-p

Y(1)=q^n // c'est p\_0

for k=1:n

Y(k+1)=(p\*(n-k+1)/(q\*k))\*Y(k)

end

endfunction

2)

Si  $Y$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , alors

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, q_k = P(Y = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Nous avons donc la relation de récurrence

$$q_0 = \exp(-\lambda) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} \iff q_k = \frac{\lambda}{k} \times q_{k-1}$$

function Y=P(n,lambda)

Y=zero(1,n+1)

page 2

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.