INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE–15

On se donne un réel strictement positif λ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables binomiales telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. On se donne aussi une variable Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.

Mais ce théorème ne dit pas si, pour un entier n fixé, $P(Y = k)$ est une bonne approximation de $P(X_n = k)$.

Pour le savoir, nous allons faire une étude numérique et en tirer une règle empirique.

1)

Ecrire une function Y=B(n,lambda) qui calcule b_k=P($X_n = k$) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et donne en sortie Y=$[b_0, b_1, \ldots, b_n]$

2)

Ecrire une function Y=P(n,lambda) qui calcule p_k=P(Y=k) pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ et donne en sortie Y=$[p_0, p_0, \ldots, p_n]$.

3)

Faire tracer les diagrammes en barres (ou en bâtons) des valeurs $P(X_n = k)$ et $P(Y = k)$ des lois de X_n et de Y pour $0 \leq k \leq 30$ dans les cas suivants :

i) $\lambda = 1$, $n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

ii) $\lambda = 4$, $n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

4)

Conclusion ?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 15

1)

Rappelons que, si X suit la binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors

$X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ avec $q=1-p$.

Pour $k+1\leq n$,

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}$$

$$= \frac{n!k!(n-k)!p^{k+1}q^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!n!p^kq^{n-k}}$$

$$= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{q}$$

Pour $k=n,\ P(X=n)=p^n$.

Nous avons donc une relation de récurrence entre $p_{k+1}=P(X=k+1)$ et $p_k=P(X=k)$. Cette relation est

$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ p_{k+1}=p_k\times\frac{p(n-k)}{(k+1)q}$; décalons d'une cran :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ p_k=\frac{p(n-k+1)}{kq}p_{k-1} \text{ et } p_0=q^n$$

Nous allons stocker ces valeurs dans une matrice $Y\in\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ en remarquant que $Y(k+1)=p_k$.

Pour des commodités d'écriture, nous noterons $p=\frac{\lambda}{n}$.

```
function Y=B(n,lambda)
Y=zeros(1,n+1) // matrice ligne de longueur n+1 formée de zéros
p=lambda/n
q=1-p
Y(1)=q^n // c'est p0
for k=1:n
Y(k+1)=(p*(n-k+1)/(q*k)*Y(k)
end
endfunction
```

2)

Si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, alors

$Y(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ q_k=P(Y=k)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$.

Nous avons donc la relation de récurrence

$$q_0=\exp(-\lambda) \text{ et } \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \frac{q_k}{q_{k-1}}=\frac{\lambda}{k}\iff q_k=\frac{\lambda}{k}\times q_{k-1}$$

```
function Y=P(n,lambda)
Y=zero(1,n+1)
```


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.