



EXERCICES D'INFORMATIQUE



INFORMATIQUE

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE-15

On se donne un réel strictement positif λ et une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables binomiales telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. On se donne aussi une variable Y telle que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

On sait que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.

Mais ce théorème ne dit pas si, pour un entier n fixé, $P(Y = k)$ est une bonne approximation de $P(X_n = k)$.

Pour le savoir, nous allons faire une étude numérique et en tirer une règle empirique.

1) _____

Ecrire une fonction $Y=B(n,\lambda)$ qui calcule $b_k=P(X_n = k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et donne en sortie $Y=[b_0, b_1, \dots, b_n]$

2) _____

Ecrire une fonction $Y=P(n,\lambda)$ qui calcule $p_k=P(Y=k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et donne en sortie $Y=[p_0, p_0, \dots, p_n]$.

3) _____

Faire tracer les diagrammes en barres (ou en bâtons) des valeurs $P(X_n = k)$ et $P(Y = k)$ des lois de X_n et de Y pour $0 \leq k \leq 30$ dans les cas suivants :

i) $\lambda = 1, n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

ii) $\lambda = 4, n = 10$, puis $n = 30$, puis $n = 50$.

4) _____

Conclusion ?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 15

1) _____

Rappelons que, si X suit la binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p.$$

Pour $k + 1 \leq n$,

$$\begin{aligned} \frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)} &= \frac{\binom{n}{k + 1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n! k! (n - k)! p^{k+1} q^{n-k-1}}{(k + 1)! (n - k - 1)! n! p^k q^{n-k}} \\ &= \frac{n - k}{k + 1} \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Pour $k = n$, $P(X = n) = p^n$.

Nous avons donc une relation de récurrence entre $p_{k+1} = P(X = k + 1)$ et $p_k = P(X = k)$. Cette relation est

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, p_{k+1} = p_k \times \frac{p(n - k)}{(k + 1)q}; \text{ décalons d'une cran :}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_k = \frac{p(n - k + 1)}{kq} p_{k-1} \text{ et } p_0 = q^n$$

Nous allons stocker ces valeurs dans une matrice $Y \in \mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbb{R})$ en remarquant que $Y(k + 1) = p_k$.

Pour des commodités d'écriture, nous noterons $p = \frac{\lambda}{n}$.

function Y=B(n,lambda)

Y=zeros(1,n+1) // matrice ligne de longueur n+1 formée de zéros

p=lambda/n

q=1-p

Y(1)=q^n // c'est p_0

for k=1:n

Y(k+1)=(p*(n-k+1)/(q*k))*Y(k)

end

endfunction

2) _____

Si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, q_k = P(Y = k) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Nous avons donc la relation de récurrence

$$q_0 = \exp(-\lambda) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{q_k}{q_{k-1}} = \frac{\lambda}{k} \iff q_k = \frac{\lambda}{k} \times q_{k-1}$$

function Y=P(n,lambda)

Y=zero(1,n+1)

page 2

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.