BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

MATHÉMATIQUES

OPTION : ÉCONOMIQUE

Mercredi 30 avril 2014, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}\,, \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j}\,, \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \qquad \text{(somme des coefficients des lignes)}$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}\,, \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}\,, \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \qquad \text{(somme des coefficients des colonnes)}$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}\,, \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} \qquad \text{(somme des coefficients des diagonales)}$$

Pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.
   a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, fait correspondre le vecteur $f(A) = \big(s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A)\big)$ de $\mathbb{R}^8$.

2.a) Montrer que f est une application linéaire.
   b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A).$$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) On note $\mathrm{Ker} f$ le noyau de l'application linéaire f. Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \mathrm{Ker} f$.

c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\mathrm{Ker} f$ et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(J)$.

d) Quel est le rang de l'application f ?

e) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker} f$.

PROBLÈME

- *La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée* Φ.
- *La notation* exp *désigne la fonction exponentielle.*
- *Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.*

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$.

   a) Montrer que la fonction N est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

   b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

   c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $N'(x) \leqslant 0$.

   d) En déduire pour tout $x \in [0, 1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\,\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

   a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée.

   c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
   Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = -2\,\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

   d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0, 1[$.
   En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 1[$ dans $[1, +\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

   a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

   c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \dfrac{1}{2}\right)$.

   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

   b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}w_n\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,.$$

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\big(v_n\sqrt{nw_n}\big) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$.

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

e) À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = n!\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}J_n(n)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6.a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\big([S_n \leqslant n]\big)$ et $P\big([S_n \geqslant n]\big)$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P\big([S_{n+1} \leqslant n+1]\big) - P\big([S_n \leqslant n]\big) = -\frac{1}{(n+1)!}\left(\int_n^{n+1}\big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\mathrm{d}t\right).$$

c) En déduire que la suite $\big(P([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(P([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que les deux suites $\big(P([S_n \leqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(P([S_n \geqslant n])\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

8.a) Énoncer le théorème de la limite centrée et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big([S_n \leqslant n]\big)$.

b) En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent et la limite de $P\big([S_n = n]\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big([S_n \geqslant n]\big)$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $P\big([X \leqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P\big([X \geqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

9. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et un type `type proba = array[1. . N] of real`. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable `loi` de type `proba`.

Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function mediane (loi :proba) :real ;` qui renvoie une médiane de X.

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(|X-r|) = E(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P([X=k])$.

b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P([X=k])$.

En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E(|X-r|) = E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$.

c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E(|X-r|) - E(|X-m|)$. Conclure.

d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

En utilisant les questions 7 et 8, justifier que n est une médiane de X.

En utilisant les questions 10.a et 8.c, montrer que $E(|X-n|)$ est équivalent à $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.
On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E(|X-x|)$.

a) Établir pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant x(1-F(x)) \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que $\lim_{x\to+\infty} x(1-F(x)) = 0$.

En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que $\lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0$.

b) Établir pour tout x réel, la relation : $M(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}(1-F(t))\mathrm{d}t$.

c) Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t)-1)\mathrm{d}t$.

d) On note m une médiane de X. Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1218 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

HEC 2014 VOIE E

CORRIGE

Le langage Pascal n'étant plus au programme, nous n'avons pas traité la question d'informatique.

EXERCICE

1–a)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{lll} A \in \mathcal{E} & \Longleftrightarrow & a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \exists\,(a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}) \in \mathbb{R}^8 \ / \\ A & = & \begin{pmatrix} -a_{2,2} - a_{3,3} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ A & = & a_{2,2}(-E_{1,1} + E_{2,2}) + a_{3,3}(-E_{1,1} + E_{3,3}) + a_{1,2}E_{1,2} + a_{1,3}E_{1,3} \\ & & +a_{2,1}E_{2,1} + a_{2,3}E_{2,3} + a_{3,1}E_{3,1} + a_{3,2}E_{3,2} \qquad \textbf{(1.a)} \end{array}$$

Puisque les coefficients $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}$ sont quelconques, cela exprime que $\mathcal{E} = \text{vect}(-E_{1,1} + E_{2,2}, -E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2})$

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

1–b)

Supposons la combinaison linéaire (1.a) égale à (0). On obtient tout de suite que les 8 coefficients sont nuls. La famille $(-E_{1,1} + E_{2,2}, -E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2})$ est libre ; c'est donc une base de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ de dimension } 8}$$

Une autre méthode.

Considérons l'application s_7 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui, à toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ fait correspondre $s_7(A)$. Montrons que s_7 est linéaire.

Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et α un réel.

Alors $\alpha A + B = (\alpha a_{i,j} + b_{i,j})$.

$$\begin{aligned} s_7(\alpha A + B) &= \alpha a_{1,1} + b_{1,1} + \alpha a_{2,2} + b_{2,2} + \alpha a_{3,3} + b_{3,3} \\ &= \alpha(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + b_{1,1} + b_{2,2} + b_{3,3} \\ &= \alpha s_7(A) + s_7(B) \end{aligned}$$

L'application s_7 est une application linéaire. On remarque que $\mathcal{E} = \text{Ker}\, s_7$. Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

D'autre part, $\operatorname{Im} s_7$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Or il n'y a que deux sous-espaces de $\mathbb{R}$: $\{0\}$ de dimension 0 et $\mathbb{R}$ de dimension 1. Par conséquent $\operatorname{Im} s_7 = \{0\}$ ou $\operatorname{Im} s_7 = \mathbb{R}$.

$\operatorname{Im} s_7 = \{0\}$ veut dire que s_7 est l'application nulle. Ceci est manifestement faux car $s_7(I_3) = 3$. Donc $\operatorname{Im} s_7 = \mathbb{R}$.

Le théorème du rang donne alors $\dim \operatorname{Ker} s_7 = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im} s_7 = 9 - 1 = 8$.

Remarque : les étudiants savent peut-être que $s_7(A)$ est la trace de A ; ils savent peut-être aussi que la trace est linéaire. Mais ces connaissances sont à la limite du programme, raison pour laquelle nous les avons démontrées.

2–a)

On montre, comme pour s_7 que les autres applications s_k sont linéaires. (Pour les étudiants n'ayant pas utilisé la deuxième méthode, il suffit de montrer que l'une d'entre elles est linéaire).

$$\begin{aligned} f(\alpha A + B) &= (s_1(\alpha A + B), \dots, s_8(\alpha A + B)) \\ &= (\alpha s_1(A) + s_1(B), \dots, \alpha s_8(A) + s_8(B)) \\ &= \alpha(s_1(A), \dots, s_8(A)) + (s_1(B), \dots, s_8(B)) \\ &\qquad \text{par définition des opérations } + \text{ et } . \text{ dans } \mathbb{R}^8 \\ &= \alpha f(A) + f(B) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est linéaire : } f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathbb{R}^8)}$$

2–b)

On écrit en <u>colonnes</u> les coordonnées dans la base $(\mathcal{C})$ des images par f des vecteurs de la base $(\mathcal{B})$.

Calculons l'une de ces images, par exemple $f(E_{2,3})$, et donnons les autres résultats sans justification.

$$E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} s_1(E_{2,3}) = 0 & ; & s_2(E_{2,3}) = 1 & ; & s_3(E_{2,3}) = 0 \\ s_4(E_{2,3}) = 0 & ; & s_5(E_{2,3}) = 0 & ; & s_6(E_{2,3}) = 1 \\ s_7(E_{2,3}) = 0 & ; & s_2(E_{2,3}) = 0 & & \end{array} \right.$$

Donc $f(E_{2,3}) = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$. Par suite la colonne des coordonnées de $f(E_{2,3})$ dans la base $(\mathcal{C})$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On trouve pour F la matrice suivante :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} f(E_{1,1}) & f(E_{1,2}) & f(E_{1,3}) & f(E_{2,1}) & f(E_{2,2}) & f(E_{2,3}) & f(E_{3,1}) & f(E_{3,2}) & f(E_{3,1}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3–a)

- $\mathcal{G}$ n'est pas vide car la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient évidemment à $\mathcal{G}$.
- Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et α un réel.

On sait d'après 2–a) que $\forall i \in [\![1,8]\!],\ s_i(\alpha A+B) = \alpha s_i(A) + s_i(B)$.
Si A et B appartiennent à $\mathcal{G}$, $s_i(A) = s_1(A)$ (par exemple) et $s_i(B) = s_1(B)$; par suite, $\forall i \in [\![1,8]\!],\ s_i(\alpha A+B) = \alpha s_i(A)+s_i(B) = \alpha s_1(A)+s_1(B) = s_1(\alpha A+B)$. Ceci prouve que $\alpha A+B$ appartient à $\mathcal{G}$

$$\boxed{\mathcal{G} \neq \emptyset \ ;\ \mathcal{G} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ ;\ \forall (A,B) \in \mathcal{G}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha A+B \in \mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ est un s-e-v de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

3–b)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{G}\cap\mathcal{E} &\iff A \in \mathcal{G} \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{E} \\ &\iff \forall i \in [\![1,8]\!],\ s_i(A) = s_7(A) \ \text{(tous les nombres } s_i \text{ sont égaux) et } s_7(A) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1,8]\!],\ s_i(A) = 0 \\ &\iff f(A) = 0_{\mathbb{R}^8} \\ &\iff A \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

Nous avons montré que $\boxed{\mathcal{G}\cap\mathcal{E} = \operatorname{Ker} f}$

3–c)

Procédons par analyse-synthèse.

- **Analyse.**

Soit A une matrice de $\mathcal{G}$; supposons qu'il existe $(B,B') \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{vect}(J)$ tel que $A = B+B'$.

$f(A) = f(B)+f(B')$ (car f est linéaire) $= f(B')$ car $B \in \operatorname{Ker} f$.

Or $B' \in \operatorname{vect}(J) \iff \exists S \in \mathbb{R}\ /\ B' = SJ$. Par suite $f(B') = Sf(J)$.

Remarquons que $\forall i \in [\![1,8]\!],\ s_i(J) = 3$. Par conséquent, $f(J) = (3,\ldots,3) \in \mathbb{R}^8$ et $f(B') = 3S(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^8$.

$f(A) \in \mathcal{G} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ /\ f(A) = (\lambda,\ldots,\lambda) = \lambda(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^8$ (remarquons que λ est la valeur commune de $s_i(A)$ pour $1 \leq i \leq 8$).

On a donc $f(A) = f(B') \iff \lambda(1,\ldots,1) = 3S(1,\ldots,1) \iff \lambda = 3S \iff S = \dfrac{\lambda}{3}$.

$A = B+B' = B+SJ$ avec $B \in \operatorname{Ker} f$ implique $S = \dfrac{\lambda}{3}$ où λ est la valeur commune de $s_i(A)$ pour $1 \leq i \leq 8$.

Cela prouve que B' est déterminé de manière unique par A. Par suite $B = A-B'$ est déterminée de manière unique par A.

En résumé : Si $A = B+B' = B+SJ$, alors S est déterminé de manière unique par l'égalité $S = \dfrac{\lambda}{3}$ où λ est la valeur commune de $s_i(A)$ pour $1 \leq i \leq 8$ et B est déterminée de manière unique par $B = A-SJ$.

- **Synthèse.** Soit $A \in \mathcal{G}$; il existe $\lambda \in \mathbb{R}\ /\ \forall i \in [\![1,8]\!],\ \lambda = s_i(A)$.

Considérons la matrice $B' = \dfrac{\lambda}{3}J$ et $B = A-B'$.

Il est clair que $B' \in \operatorname{vect}(J)$.

Vérifions que $B \in \operatorname{Ker} f$.

$f(B) = f(A)-f(B') = f(A)-\dfrac{\lambda}{3}f(J) = \lambda(1,\ldots,1)-\dfrac{\lambda}{3}(3,\ldots,3) = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^8$.

$f(B) = (0,\ldots,0)$, donc $B \in \operatorname{Ker} f$.

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{G},\ \exists!(B,B') \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{vect}(J)\ /\ A = B+B'}$$

3–d)

Rappels concernant le rang d'une application linéaire.

- Le rang d'une application linéaire f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F (de dimension finie) est la dimension de son image.

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}\, f)$$

- Pour déterminer le rang de f, on peut considérer sa matrice dans une base de E et une base de F ; on la réduit par la méthode du pivot de Gauss de manière à faire apparaitre des termes diagonaux non nuls consécutifs.

On peut noter que c'est aussi le nombre de lignes non nulles après réduction.

Le rang de f est alors le nombre de termes diagonaux consécutifs non nuls (on dit aussi pivots).

Détermination du rang de f.

On peut déjà remarquer que $\text{rang}(f) \leq 8$, car f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$, donc $\text{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^8$.

Rappelons que $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Effectuons $L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 + L_3 - L_4 - L_5 - L_6$. On obtient la matrice équivalente

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Faisons alors passer la ligne L_1 en $8^{\text{ème}}$ position ; on obtient la matrice équivalente

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur F_2 effectuons les opérations suivantes : $L_1 \longleftarrow L_3$, puis $L_6 \longleftrightarrow L_1$, puis $L_4 \longleftarrow L_6$, puis $L_2 \longleftarrow L_4$, puis $L_7 \longleftarrow L_2$, puis $L_5 \longleftarrow L_7$, puis $L_3 \longleftarrow L_5$. Cela revient à une permutation des lignes. En effet la liste $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ des numéros des lignes devient la liste $(3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 8)$. On obtient la matrice équivalente

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur F_3 effectuons $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$; on obtient

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur F_4 effectuons $L_5 \longleftarrow L_5 - L_3$ et $L_6 \longleftarrow L_6 + L_4$; on obtient

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin sur F_5 effectuons $L_6 \longleftarrow L_6 - 2L_5$; cela donne

$$F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est réduite ; elle possède 7 termes diagonaux consécutifs non nuls, puis une ligne de 0. Son rang est égal à 7

$$\boxed{\text{Le rang de } f \text{ est } 7}$$

3–e)

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Im} f = 9 - 7 = 2$.

Pour trouver une base de $\operatorname{Ker} f$, il suffit de trouver deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, non proportionnelles, pour lesquelles les fonctions s_i pour $1 \leq i \leq 8$ soient nulles

Par exemple,

$$\boxed{K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEME

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1–a)

L'application $x \mapsto 1 - x$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$ en tant que fonction polynomiale, et $\forall x \in [0, 1[,\ 1 - x > 0$.

La fonction ln est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

Par produit $x \mapsto -2(1-x)\ln(1-x)$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

