BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 290

Concours d'admission de 2014

Conception : ESSEC

OPTION ECONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Vendredi 9 mai 2014, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité de probabilité f vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :
- continue sur I ;
- strictement positive sur I ;
- nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).

On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires continues.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :
- X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$P([U \leqslant h(X)]) = P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\forall x \in I,\ \Psi(x) = P([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x,y) = \max_{t\in[x,y]} h(t)$ et $m(x,y) = \min_{t\in[x,y]} h(t)$.

   (a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x,b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x,y]$ tel que $M(x,y) = h(\alpha_y)$.

   (b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} M(x,y) = h(x)$.

   (c) Montrer de même que pour tout y dans I, $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} M(x,y) = h(y)$.

   On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} m(x,y) = h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} m(x,y) = h(y)$.

2. Soit x et y des réels de I tels que $x < y$.

   (a) Établir l'inclusion suivante entre événements :

   $$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \subset [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y))]$$

   En déduire l'inégalité :

   $$\Psi(y) - \Psi(x) \leqslant (F(y) - F(x))M(x,y)$$

   (b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement

   $$\frac{F(y)-F(x)}{y-x}m(x,y) \leqslant \frac{\Psi(y)-\Psi(x)}{y-x} \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x}M(x,y)$$

   (c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

3. (a) En déduire que, pour tout x et y dans I :

   $$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$, puis montrer : $\lim\limits_{x\to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

   $$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) Établir : pour tout x dans I, $P([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = P([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$.
   En déduire : $\lim\limits_{x\to b} \Psi(x) = P([U \leqslant h(X)])$, puis

   $$P([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Montrer que $P([U < h(X)]) = 1 - P([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$, et en déduire

   $$P([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3. On suppose que :

- pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
- pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
- pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ tels que :
$$\begin{cases} x_1 & > & \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 & > & \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 & > & \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

   (b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. (a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace vectoriel associé.

   (b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

   On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1,1[$.

7. (a) Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.

   (b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha + \beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1,1[$.

8. On suppose, dans cette question, seulement que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP$(]0,1[)$.
   En utilisant les résultats de la partie 1, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - E(\beta)$.

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et $y_i + z_i$ le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.
   On définit les deux matrices lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = YA + ZB$.

   (b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
   En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En Pascal par exemple, on dispose de l'instruction `random`. Ces générateurs produisent une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ces générateurs aléatoires.

Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

3a - Simulation par la méthode d'inversion

10. (a) On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variations de H^{-1}.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$. On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

(b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

(c) En déduire que X suit la même loi que Z.

11. Simulation de lois exponentielles.

On suppose dans cette question que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

(b) Écrire une fonction en Pascal d'en-tête `function expo(lambda:real):real` qui simule la loi exponentielle.

12. Simulation de la loi de Laplace.

On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} \quad \text{(densité de Laplace)}.$$

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$, ce qui signifie $P([V=-1]) = P([V=1]) = \frac{1}{2}$.

On pose $X = VY$.

(a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

(b) Établir :

- pour tout $x \geqslant 0$, $P([X > x]) = \frac{1}{2}P([Y > x])$;
- pour tout $x \leqslant 0$, $P([X \leqslant x]) = \frac{1}{2}P([Y \geqslant -x])$.

(c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

(d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

(e) Compléter la fonction Pascal suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

```
function laplace:real;
var y,v:real;
begin
    y:=expo(1);
    v:=random;
    if ... then
        laplace:=y
    else
        laplace:=...;
end;
```

3b - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant cf(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = cf(x)h(x)$.

On considère alors :

- une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent la loi uniforme sur $]0,1[$.
- une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $]a,b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.
  On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1,\ldots,X_n,U_1,\ldots,U_n$ sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la partie 1, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P([U_k \leqslant h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
    En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est-à-dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
    Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
    (b) En utilisant la question 3.(b), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
    $$P([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}G(x).$$
    (c) En déduire $P([X \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.
    (d) Montrer finalement : $P([X \leqslant x]) = G(x)$.
16. Conclure.
17. Simulation de la loi normale.
    Dans cette question, Z suit la loi normale centrée et réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
    Soit f la densité de Laplace (question 12), définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

(a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

(b) Étudier les variations sur $[0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto e^{x-\frac{x^2}{2}}$.

(c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \leqslant \frac{c}{2} e^{-x}$.

(d) En déduire que pour tout x réel, $g(x) \leqslant cf(x)$.

(e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée et réduite. On explicitera en particulier la fonction h introduite à la question 13.

(f) Compléter la fonction Pascal suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```
function normale:real;
var x,u:real;
begin
    repeat
        x:=laplace;
        u:=random;
    until ...
    normale:=...;
end;
```


Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

ESSEC 2014 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

Le langage informatique Pascal n'étant plus du programme, nous n'avons pas traité les questions d'informatique

PARTIE I : calcul d'une probabilité

1–a)

L'intervalle $[x, y]$ est inclus dans l'intervalle $]0, 1[$. La fonction h est donc continue sur $[x, y]$. D'après le cours, elle admet sur cet intervalle un maximum noté $M(x, y)$.

$$\boxed{\exists\, \alpha_y \in [x, y] \ / \ M(x, y) = h(\alpha_y)}$$

1–b)

On a l'encadrement $x \leq \alpha_y \leq y$; par suite $y \to x$, avec $y > x \Longrightarrow \alpha_y \to x$, avec $\alpha_y \geq x$.

Par continuité de la fonction h au point x, $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} h(\alpha_y) = h(x)$.

$$\boxed{\lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)}$$

1–c)

La fonction h est donc continue sur $[x, y]$. D'après le cours, elle admet sur cet intervalle un minimum noté $m(x, y)$.

$\exists\, \beta_y \in [x, y] \ / \ m(x, y) = h(\beta_y)$.

$\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} h(\beta_y) = h(x)$ (continuité de h au point x), donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} m(x, y) = h(x)}$

2–a)

Soit $\omega \in [x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)]$. On a donc $x < X(\omega) \leq y$ et $U(\omega) \leq h(X(\omega))$;

d'après 1–a), $h(X(\omega)) \leq M(x, y)$, donc $U(\omega) \leq M(x, y)$.

Pour $\omega \in \Omega \ / \ x < X(\omega) \leq y$, on a $U(\omega) \leq M(x, y)$. Cela veut dire pour tout $\omega \in \Omega$,

$[x < X(\omega) \leq y] \cap [U(\omega) \leq h(X(\omega))] \subset [x < X(\omega) \leq y] \cap [U(\omega) \leq M(x, y)]$ ou encore,

$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$

$$\begin{aligned} \Psi(y) - \Psi(x) &= P([X \leq y] \cap [U \leq h(X)]) - P([X \leq x] \cap [U \leq h(X)]) \\ &= P([X \leq y])P([U \leq h(X)]) - P([X \leq x])P([U \leq h(X)]) \end{aligned}$$

En effet, les variables U et X sont indépendantes, donc tout événement dû à la variable X et indépendant de tout événement dû à la variable U ; par suite les

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.