BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2014 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On remarquera que E_1 est inclus dans E.

On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Propriétés générales de T

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(T(f)\big)'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big).$$

On note $T : E \longrightarrow E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E.

3. Est-ce que T est surjectif ?

4. Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).
À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

5. Soit $f \in E$. Montrer que, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

EMLYON Business School est affiliée à la Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon.

6. On note $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$.
Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif ?

Partie II : Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\quad f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f_a(t) = \mathrm{e}^{at}$.

7. Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note : $\quad \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto \varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$

8. Établir : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad T(f_a) = \varphi(a) f_a$.

9. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$.
Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $\mathrm{e}^a(a-1) + \mathrm{e}^{-a}(a+1)$.
En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

10. En déduire que, pour tout $\lambda \in [1\,;+\infty[$, il existe $f \in E - \{0\}$ tel que : $T(f) = \lambda f$.

Partie III : Deuxième exemple

On note : $\quad h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto h(t) = \dfrac{1}{|t|+1}$.

11. Vérifier $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(h)(x)$.
À cet effet, on remarquera que h est paire, et on distinguera les cas $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $1 < x$.

12. Étudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.
On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln 2 \approx 0,69...$, $\ln 3 \approx 1,10...$

13. Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5. est vraie, c'est-à-dire, est-ce que, pour tout élément f de E, si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ?

Partie IV : Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note : $\quad F :]1\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$,

de sorte que $F(x) = 2\,T(h)(x)$, où h a été définie dans la partie III, et on note :

$$H :]1\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto H(x,y) = F(x) + F(y) - 2F(xy).$$

14. Montrer que H est de classe C^1 sur $]1\,;+\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H en tout $(x,y) \in]1\,;+\infty[^2$.

15. Établir que H admet un point critique et un seul, que l'on calculera.
On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.

16. On admet que H est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[^2$ et que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) \approx -1,2 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \approx -4,5 \cdot 10^{-2}.$$

Est-ce que H admet un extrémum local sur $]1\,;+\infty[^2$?

Partie V : Transformée d'une densité

Soit $f \in E$. On suppose, dans cette partie, que f est une densité.

17. Montrer, pour tout (A, B) de $\mathbb{R}^2$:
$$\int_A^B T(f)(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

18. Montrer : $\forall B \in \mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant T(f)(B)$.

En déduire la limite de $\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque B tend vers $+\infty$.

19. Établir que $T(f)$ est aussi une densité.

PROBLÈME 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $[\![1\,;n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $\left(V_i\right)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout (i, j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i\,{}^tV_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$$\forall M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A.

On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.

5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que ${}^{t}A$ est diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et ${}^{t}A$ ont les mêmes valeurs propres.

7. Soient $X, Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^{t}A$).
Montrer que $X\,{}^{t}Y$ est un vecteur propre de Φ_A.

8. Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{F} = \left(X_i\,{}^{t}Y_j\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.
Montrer que, pour tout (i,j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, $V_i\,{}^{t}V_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Établir que Φ_A est diagonalisable.

10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Partie IV : Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0.$$

11. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\quad \Phi_A(T^k) = \lambda k\, T^k$.

12. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de $\mathbb{N}^*$ tel que : $\quad T^q = 0 \quad$ et $\quad q \leqslant n^2$.

On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

13. Justifier qu'il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.
Montrer que la famille $(X, TX, \ldots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire : $\quad p \leqslant n$.

Partie V : Étude du cas où A est symétrique

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}\,A\,P$ est diagonale. On note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les colonnes de P.

Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M \mid N) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

14. Montrer que l'application $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

15. Montrer : $\quad \forall (M,N) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2,\quad (M \mid N) = (M\,{}^{t}N \mid I_n)$.

16. Pour tout (i,j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, calculer ${}^{t}C_i\,C_j$.

17. Pour tout (i,j) de $[\![1\,;n]\!]^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i\,{}^{t}C_j$ et en déduire la valeur de $(C_i\,{}^{t}C_j \mid I_n)$.

18. Pour tout (i,j,k,ℓ) de $[\![1\,;n]\!]^4$, calculer $(C_i\,{}^{t}C_j \mid C_k\,{}^{t}C_\ell)$.

19. On considère la famille $\mathcal{G} = \left(C_i\,{}^{t}C_j\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$ de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de Φ_A.

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1238 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2014

EM-LYON 2014 VOIE S

CORRIGE

PROBLEME I

Partie I : propriétés générales de T

1)

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (il en existe car f est continue sur $\mathbb{R}$).

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$.

Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont continues, dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; F est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, les fonctions $x \mapsto F(x+1)$ et $x \mapsto F(x-1)$ sont continues, dérivables sur $\mathbb{R}$ (elles sont même de classe C^1).

$$\boxed{T(f) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ (T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))}$$

2)

L'application T va donc de E dans $E_1 \subset E$. La linéarité de T résulte de celle de l'intégration, donc

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$$

3)

Soit $g \in E$. Supposons qu'il existe $f \in E \ /\ g = T(f)$, alors g est dérivable comme nous l'avons montré.

L'application $x \mapsto |x|$ appartient à E, elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, elle n'admet donc pas d'antécédent par T.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } T \text{ n'est pas surjectif}}$$

4)

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(-x) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)dt$. Posons $u = -t$; $dt = -du$.

On obtient $T(f)(-x) = -\frac{1}{2}\displaystyle\int_{x+1}^{x-1} f(-u)du = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)du$.

Si f est paire, $T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)du = T(f)(x)$;

si f est impaire, $T(f)(-x) = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)du = -T(f)(x)$

$$\boxed{T(f) \text{ et } f \text{ ont la même parité}}$$

5)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge équivaut à $\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}(\int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^{x-1} f(t)dt)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{x+1} f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{x-1} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^{x+1} f(t)dt = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^{x-1} f(t)dt = \int_0^{-\infty} f(t)dt \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} T(f)(x) = 0$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge implique } \lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim_{x\to-\infty} T(f)(x) = 0}$$

6)

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ T(s)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \sin(\pi t)dt = -\frac{1}{2\pi}\Big[\cos(\pi t)\Big]_{x-1}^{x+1} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\Big(\cos(\pi(x+1)) - \cos(\pi(x-1))\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\Big(\cos(\pi x+\pi) - \cos(\pi x-\pi)\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\Big(\cos(\pi x+\pi) - \cos(\pi x+\pi)\Big) \quad \text{car } \cos(t-\pi) = \cos(t-\pi+2\pi) \\
\forall x \in \mathbb{R},\ T(s)(x) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\boxed{s \text{ n'est pas la fonction nulle } 0_E \text{ de } E,\ T(s) = 0_E, \text{ donc } T \text{ n'est pas injectif}}$$

Partie II : premier exemple

7)

$$T(f_a)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} e^{at}dt$$

- $a = 0 \Longrightarrow T(f_0)(x) = \frac{1}{2}(x+1-(x-1)) = 1$.
- $a \neq 0 \Longrightarrow T(f_a)(x) = \frac{1}{2a}(e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}) = e^{ax}\frac{e^a - e^{-a}}{2a}$.

$$\boxed{T(f_a)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 0 \\ e^{ax}\dfrac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si} \quad a \neq 0 \end{cases}}$$

8)

En lisant le résultat précédent, $\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ T(f_a) = \varphi(a) f_a}$