BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :

296

EML_MATS

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOURNEZ S.V.P.

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = PDP^{-1}$.
Calculer P^{-1}.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.

4. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = AX_{n-1}$.

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$.

d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

e. Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leqslant 10^{-2}$.

Exercice 2

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application :

$$g \ : \ ]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = x^2 + \ln x.$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ et on considère l'application :

$$f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x.$$

1. **a.** Montrer que f est strictement croissante sur I.

b. Montrer : $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

c. En déduire : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$.

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto F(x,y) = x\,\mathrm{e}^y + y \ln x.$$

1. **a.** Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b. Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

2. Est-ce que F admet un extremum local ?

Exercice 3

1. On considère l'application $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- $\star$ l'événement $\big(Y = 0\big)$ est égal l'événement $\big(X < 1\big)$,
- $\star$ pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $\big(Y = n\big)$ est égal à l'événement $\big(n \leqslant X < n + 1\big)$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-n}$.

b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.

c. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y.

```
program eml2007;
var y:integer; u:real;
begin
        randomize;
        u:=random; y:=···;
        while ...  do
                ...   ...   ...
        writeln('y vaut ', y);
end.
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = \mathrm{P}(U = 0) = \dfrac{1}{2}\cdot$
On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

a. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $\mathrm{E}(T)$ et calculer $\mathrm{E}(T)$.

b. Vérifier que $T^2 = Y^2$.
En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $\mathrm{V}(T)$ et calculer $\mathrm{V}(T)$.

c. Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

a. Justifier : $\forall t \in]-\infty\,;0[,\quad \mathrm{F}_D(t) = 0,\quad$ et : $\forall t \in [1\,;+\infty[,\quad \mathrm{F}_D(t) = 1$.

b. Soit $t \in [0\,;1[$. Exprimer l'événement $\big(D \leqslant t\big)$ à l'aide des événements $\big(n \leqslant X \leqslant n + t\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout nombre réel $t \in [0\,;1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathrm{P}\big(n \leqslant X \leqslant n + t\big)$.

d. Montrer : $\forall t \in [0\,;1[,\ \ \mathrm{F}_D(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

e. Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EM-LYON 2007 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1)

La matrice A est **symétrique réelle, donc diagonalisable**.

2)

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B_c. Dans cette base la matrice A est associée à un endomorphisme de E, noté f. Rappelons que A diagonalisable équivaut à f diagonalisable et que les valeurs propres de A sont les mêmes que celles de f.

- Déterminons spect(f).

$\lambda \in \text{spect}(f) \iff \exists\, u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ u \neq (0,0,0)\ /\ f(u) = \lambda u \qquad$ **(1)**

$$\textbf{(1)} \iff \begin{cases} -\lambda x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 0 \\ \frac{1}{2}x - \lambda y + \frac{1}{2}z &= 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \quad L_3 \longleftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ \frac{1}{2}x - \lambda y + \frac{1}{2}z &= 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -\lambda x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 0 \quad L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}L_3 + \lambda L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ -(\lambda + \frac{1}{2})y + (\lambda + \frac{1}{2})z &= 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})y + (\frac{1}{4} - \lambda^2)z &= 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ -(\lambda + \frac{1}{2})y + (\lambda + \frac{1}{2})z &= 0 \\ P(\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\tfrac{1}{4} - \lambda^2) + \tfrac{1}{2}(\lambda + \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2} - \lambda)(\tfrac{1}{2} + \lambda) + \tfrac{1}{2}(\lambda + \tfrac{1}{2}) \\ &= (\lambda + \tfrac{1}{2})(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Le système est triangularisé : il est homogène (il admet toujours la solution $(0,0,0)$**) ; donc il admettra une solution non nulle si et seulement s'il n'est pas de Cramer c'est-à-dire si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul.**

Donc λ est valeur propre de f si et seulement si $P(\lambda) = 0$, donc si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$

$$\boxed{\text{spect}(A) = \text{spect}(f) = \{-\frac{1}{2}, 1\}}$$

- Détermination des sous-espaces propres de f, notés $E(\lambda, f)$:

$*$ $u = (x, y, z) \in E(-\frac{1}{2}, f) \iff \frac{1}{2}(x + y + z) = 0$ car pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, les deux dernières lignes du dernier système sont satisfaites pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} E(-\frac{1}{2}, f) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} \\ &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -y - z\} \\ &= \{u = (-y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{u = -y(1, -1, 0) - z(1, 0, -1) \in \mathbb{R}^2, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(-\frac{1}{2}, f) = \text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \ ; \ \dim E(-\frac{1}{2}, f) = 2 \\ \text{car } (1, -1, 0) \text{ et } (1, 0, -1)) \text{ ne sont pas proportionnels} \end{array}}$$

$*$ $u = (x, y, z) \in E(1, f) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z &= 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ y &= z \end{cases} \iff x = y = z$

$$\begin{aligned} E(1, f) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} \\ &= \{u = (x, x, x) \in \mathbb{R}^3, \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(1, f) = \text{vect}((1, 1, 1))}$$

Nous remarquons que $\dim E(-\frac{1}{2}, f) + \dim E(1, f) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; cela confirme que f (donc A) est diagonalisable. Et on sait donc que la famille $((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il s'ensuit que la matrice de ces trois vecteurs exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est inversible. Cette matrice est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est bien la matrice demandée : les deux premières lignes sont celles demandées et elle est symétrique.

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de base , on a $A = PDP^{-1}$.

> En résumé ; la matrice A est diagonalisable ; il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et une matrice symétrique, inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ telles que :
>
> $$A = PDP^{-1}$$

Calcul de P^{-1} . On résout le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x + y + z &= a \\ x - y &= b \\ x \quad - z &= c \end{cases} \quad L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3) \quad \iff \begin{cases} x &= \dfrac{a + b + c}{3} \\ y &= x - b \\ z &= x - c \end{cases}$$

On obtient alors facilement $\begin{cases} x &= \dfrac{a + b + c}{3} \\ y &= \dfrac{a + b + c}{3} - b = \dfrac{a - 2b + c}{3} \\ z &= \dfrac{a + b + c}{3} - c = \dfrac{a + b - 2c}{3} \end{cases}$

Présentons le résultat sous forme matricielle :