BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

CODE SUJET :
296
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

Première épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2007 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

TOURNEZ S.V.P.

EM LYON est affiliée à la Chambre de Commerce et de l'Industrie de Lyon.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.

2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = PDP^{-1}$.
Calculer P^{-1}.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.

4. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = AX_{n-1}$.

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{cases}$$

c. Déterminer les limites respectives u, v, w de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$.

d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

e. Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leqslant 10^{-2}$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

EXERCICE 2

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application :

$$g \ : \ ]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = x^2 + \ln x.$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. Montrer : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Partie A

On note $I = \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ et on considère l'application :

$$f \ : \ I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x.$$

1. **a.** Montrer que f est strictement croissante sur I.

b. Montrer : $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.

c. En déduire : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$.

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer u_1.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$.

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto F(x,y) = x\,\mathrm{e}^y + y\ln x.$$

1. **a.** Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

b. Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

2. Est-ce que F admet un extremum local ?

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Exercice 3

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Montrer que f est une densité de probabilité.

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :

- ⋆ l'événement $(Y = 0)$ est égal l'événement $(X < 1)$,
- ⋆ pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $(Y = n)$ est égal à l'événement $(n \leqslant X < n + 1)$.

a. Montrer, pour tout entier naturel n : $\mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-n}$.

b. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.

c. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il simule la variable aléatoire Y.

```
program eml2007;
var y:integer; u:real;
begin
      randomize;
      u:=random; y:=···;
      while ...  do
          ...  ...  ...
      writeln('y vaut ', y);
end.
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = \mathrm{P}(U = 0) = \frac{1}{2}$.
On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.

Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

a. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $\mathrm{E}(T)$ et calculer $\mathrm{E}(T)$.

b. Vérifier que $T^2 = Y^2$.
En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $\mathrm{V}(T)$ et calculer $\mathrm{V}(T)$.

c. Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(T = n)$.

4. Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

a. Justifier : $\forall t \in]-\infty\,;\,0[$, $\mathrm{F}_D(t) = 0$, et : $\forall t \in [1\,;\,+\infty[$, $\mathrm{F}_D(t) = 1$.

b. Soit $t \in [0\,;\,1[$. Exprimer l'événement $(D \leqslant t)$ à l'aide des événements $(n \leqslant X \leqslant n + t)$, $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour tout nombre réel $t \in [0\,;\,1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $\mathrm{P}(n \leqslant X \leqslant n + t)$.

d. Montrer : $\forall t \in [0\,;\,1[$, $\mathrm{F}_D(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-1}}$.

e. Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EM-LYON 2007 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1)

La matrice A est **symétrique réelle, donc diagonalisable**.

2)

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B_c. Dans cette base la matrice A est associée à un endomorphisme de E, noté f. Rappelons que A diagonalisable équivaut à f diagonalisable et que les valeurs propres de A sont les mêmes que celles de f.

- Déterminons $\text{spect}(f)$.

$$\lambda \in \text{spect}(f) \iff \exists\, u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ u \neq (0,0,0)\ /\ f(u) = \lambda u \qquad \textbf{(1)}$$

$$\textbf{(1)} \iff \begin{cases} -\lambda x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 0 \\ \frac{1}{2}x - \lambda y + \frac{1}{2}z &= 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \quad L_3 \longleftrightarrow L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ \frac{1}{2}x - \lambda y + \frac{1}{2}z &= 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -\lambda x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 0 \quad L_3 \longleftarrow \frac{1}{2}L_3 + \lambda L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ -(\lambda + \frac{1}{2})y + (\lambda + \frac{1}{2})z &= 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda + \frac{1}{2})y + (\frac{1}{4} - \lambda^2)z &= 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \lambda z &= 0 \\ -(\lambda + \frac{1}{2})y + (\lambda + \frac{1}{2})z &= 0 \\ P(\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\tfrac{1}{4} - \lambda^2) + \tfrac{1}{2}(\lambda + \tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2} - \lambda)(\tfrac{1}{2} + \lambda) + \tfrac{1}{2}(\lambda + \tfrac{1}{2}) \\ &= (\lambda + \tfrac{1}{2})(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Le système est triangularisé : il est homogène (il admet toujours la solution $(0,0,0)$) ; donc il admettra une solution non nulle si et seulement s'il n'est pas de Cramer c'est-à-dire si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul.

Donc λ est valeur propre de f si et seulement si $P(\lambda) = 0$, donc si et seulement si $\lambda = -\frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

$$\boxed{\text{spect}(A) = \text{spect}(f) = \{-\frac{1}{2}, 1\}}$$

- Détermination des sous-espaces propres de f, notés $E(\lambda, f)$:

$*$ $u = (x, y, z) \in E(-\frac{1}{2}, f) \iff \frac{1}{2}(x + y + z) = 0$ car pour $\lambda = -\frac{1}{2}$, les deux dernières lignes du dernier système sont satisfaites pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} E(-\tfrac{1}{2}, f) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\} \\ &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = -y - z\} \\ &= \{u = (-y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3, (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{u = -y(1, -1, 0) - z(1, 0, -1) \in \mathbb{R}^2, \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(-\frac{1}{2}, f) = \text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)) \ ; \ \dim E(-\frac{1}{2}, f) = 2 \\ \text{car } (1, -1, 0) \text{ et } (1, 0, -1)) \text{ ne sont pas proportionnels} \end{array}}$$

$*$ $u = (x, y, z) \in E(1, f) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z & = & 0 \\ -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right. \iff x = y = z$

$$\begin{aligned} E(1, f) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\} \\ &= \{u = (x, x, x) \in \mathbb{R}^3, \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(1, f) = \text{vect}((1, 1, 1))}$$

Nous remarquons que $\dim E(-\frac{1}{2}, f) + \dim E(1, f) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$; cela confirme que f (donc A) est diagonalisable. Et on sait donc que la famille $((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Il s'ensuit que la matrice de ces trois vecteurs exprimée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est inversible. Cette matrice est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est bien la matrice demandée : les deux premières lignes sont celles demandées et elle est symétrique.

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement de base , on a $A = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En résumé ; la matrice } A \text{ est diagonalisable ; il existe une matrice diagonale } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{et une matrice symétrique, inversible } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ telles que :} \\ A = PDP^{-1} \end{array}}$$

Calcul de P^{-1} . On résout le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; ce système équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & a \\ x - y & = & b \\ x - z & = & c \end{array} \right. \quad L_1 \longleftarrow \frac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a + b + c}{3} \\ y & = & x - b \\ z & = & x - c \end{array} \right.$$

On obtient alors facilement $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a + b + c}{3} \\ y & = & \frac{a + b + c}{3} - b = \frac{a - 2b + c}{3} \\ z & = & \frac{a + b + c}{3} - c = \frac{a + b - 2c}{3} \end{array} \right.$

Présentons le résultat sous forme matricielle :

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.