BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

CODE SUJET :

287

ESSECM2_E

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 mai 2007, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Le sujet est un problème comportant quatre parties notées I, II, III et IV. La partie II est indépendante de la partie I. La partie III fait appel aux parties I et II seulement dans les deux dernières questions. La partie IV fait appel à la partie I uniquement dans la dernière question.

Notations: Tout au long du sujet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera un espace probabilisé et les variables aléatoires utilisées seront toutes définies sur cet espace probabilisé. Sous réserve d'existence, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X sera notée $E(X)$ et sa variance sera notée $V(X)$.

Rappel: Si $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectivement $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ alors

$$Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre

$$\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

Ce résultat pourra être utiliser dans ce sujet sans démonstration.

Partie I: Modélisation poissonienne

On considère une société d'assurance comptant N clients et garantissant à chacun d'entre eux un capital d'un montant de s euros en cas de décès. On suppose que le nombre de décès annuel suit une loi de Poisson de paramètre entier k. Le revenu annuel de la société fourni par la perception des primes d'assurance des N clients est au total de $ks(1+\lambda)$ euros, où λ est un réel strictement positif représentant le taux de sécurité que la société s'accorde afin de faire face à un nombre de sinistres plus élevé que la moyenne. La société dispose également d'un fond de réserve R dans lequel elle peut puiser exceptionnellement. Un bilan financier de la société est effectué tous les 5 ans.

On note Y le nombre de décès enregistrés sur une période de 5 ans.

A. Résultats généraux :

I.A.1. Donner en fonction de s et de Y la somme totale due par la société aux clients au moment du bilan financier au bout de 5 ans.

I.A.2. Dans quelles circonstances peut-on considérer que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$?

On supposera dorénavant que Y suit une loi de Poisson de paramètre $5k$.

I.A.3. Rappeler sans démonstration $E(Y)$ et $V(Y)$.

I.A.4. Justifier l'existence d'un nombre réel strictement positif unique t_0 tel que

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}dx = 0,99.$$

I.A.5. Justifier le résultat limite suivant

$$P\left(Y - 5k > t_0\sqrt{5k}\right) \to 0,01 \text{ lorsque } k \text{ tend vers } +\infty.$$

Pour la fin de cette partie, on supposera k assez grand pour utiliser l'approximation

$$P\left(Y - 5k > t_0\sqrt{5k}\right) = 0,01. \qquad \text{(A)}$$

B. Exemples d'application :

Dans cette partie il s'agit d'exploiter l'approximation (A).

I.B.1. Expliquer pourquoi la société d'assurance peut faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans si et seulement si

$$5sk(1+\lambda) + R \geq sY.$$

I.B.2. Quelle réserve R faut-il prévoir pour que la probabilité que la société puisse faire face à toutes les indemnisations requises sur l'exercice de 5 ans soit voisine de 99%? On exprimera R en fonction de s, k, λ et t_0.

I.B.3. On notera dorénavant $\mu = \frac{k}{N}$ le taux de mortalité dans l'ensemble des clients. Combien de clients N la société devrait-elle compter pour qu'elle puisse se dispenser d'un fond de réserve pour un exercice de 5 ans tout en maintenant à plus de 99% la probabilité de pouvoir faire face au paiement de toutes les indemnisations requises? On exprimera N en fonction de λ, t_0 et μ.

Partie II: Médianes

Soit X une variable aléatoire réelle. On définit l'ensemble

$$\mathcal{M}(X) = \left\{ m \in \mathbb{R} \setminus P(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq P(X \leq m) \right\}.$$

Un élément de $\mathcal{M}(X)$ est appelé **médiane** de X.

II.1. Soit X une variable aléatoire réelle, rappeler la définition de la fonction de répartition F associée à X.

II.2. Soit X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, calculer $P(X < m)$ et $P(X \leq m)$ dans les cas suivants: $m < 0$, $m = 0$, $m \in]0, 1[$, $m = 1$ et $m > 1$. En déduire $\mathcal{M}(X)$ dans ce cas.

II.3. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ de fonction de répartition notée F_X. Justifier que

$$m \in \mathcal{M}(X) \Longleftrightarrow m \geq 0 \text{ et } F_X(m) = \frac{1}{2}.$$

puis déterminer $\mathcal{M}(X)$ dans ce cas.

On revient au cadre général où X est une variable aléatoire réelle.

II.4. Soient $a \in \mathcal{M}(X)$ et $b \in \mathcal{M}(X)$ avec $a \leq b$. Montrer que si $c \in [a, b]$, on a $c \in \mathcal{M}(X)$. On a ainsi démontré que $\mathcal{M}(X)$ est un intervalle.

II.5. Supposons que X possède une densité f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0$ pour tout x réel. Montrer en utilisant avec soin le théorème de la bijection que dans ce cas $\mathcal{M}(X)$ est réduit à un réel; puis déterminer $\mathcal{M}(X)$ dans le cas particulier où X suit une loi normale centrée réduite.

II.6. En supposant que X admette une espérance, est-il exact que $E(X) \in \mathcal{M}(X)$?

Partie III: Médiane d'une variable poissonienne

A. Préliminaires d'analyse :

Il s'agit dans ces préliminaires d'étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \exp(-n) \frac{n^n}{n!}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.A.1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\ln(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{4}.$$

III.A.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right).$$

III.A.3. Déduire des deux questions précédentes la nature de la série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$.

III.A.4. Conclure sur la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n\geq 1}$ puis sur la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

B. Probabilités :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction définie par

$$P_n(\lambda) = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} = \exp(-\lambda) \left(1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!}\right)$$

pour tout réel λ.

III.B.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel λ

$$P_n''(\lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{n-1}}{n!} (\lambda - n)$$

où P_n'' est la dérivée seconde de P_n.

III.B.2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(n-1) + P_n'(n-1) = P_{n-1}(n-1)$$

où P_n' est le polynôme dérivé de P_n.

III.B.3. Soit $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$Q(n) = Q(n-1) + Q'(n-1) + \int_{n-1}^{n} (n-t) Q''(t)\, dt. \qquad \text{(E)}$$

(ii) En appliquant (E) à $Q = P_n$, démontrer que la suite $(P_n(n))_{n \geq 1}$ est décroissante.

(iii) En appliquant (E) à $Q = P_{n-1}$, démontrer que la suite $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ est croissante.

III.B.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n(n) - P_{n-1}(n) = u_n$$

où (u_n) est définie dans la partie III.A. En déduire que $(P_n(n))_{n \geq 1}$ et $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

On considère dorénavant Z une variable aléatoire réelle de loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.

III.B.5. Montrer que

$$P_n(n) = P\left(\frac{Z-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

En déduire que $(P_n(n))_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

III.B.6. Montrer que $(P_{n-1}(n))_{n \geq 1}$ converge et donner sa limite.

III.B.7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P_{n-1}(n) \leq \frac{1}{2} \leq P_n(n).$$

III.B.8. En déduire que $n \in \mathcal{M}(Z)$ où $\mathcal{M}(Z)$ est défini dans la partie II.

III.B.9. On admettra finalement que

$$\mathcal{M}(Z) = \{n\}.$$

A la lumière de ce résultat, que pensez-vous de la stratégie "généreuse" qui consisterait à choisir $\lambda = 0$ dans la modélisation effectuée dans la partie I ?

Partie IV: Inégalité maximale de Lévy

Soit J un entier strictement supérieur à 1. On considère J variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_J$. On suppose que pour chaque entier j tel que $1 \leq j \leq J$, la variable aléatoire X_j suit une loi de Poisson de paramètre entier non nul k et on définit $Y_j = X_j - k$. On pose enfin pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j .$$

IV.1. En utilisant le résultat de la question III.B.8, vérifier que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, 0 est une médiane de $S_J - S_i$.

Soit x un nombre réel positif. On considère

$$\Omega_0 = \left\{ \max_{1 \leq j \leq J} S_j \leq x \right\} \text{ et } \Omega_1 = \{S_1 > x\}$$

puis pour tout entier i tel que $2 \leq i \leq J$, on note

$$\Omega_i = \left\{ \max_{1 \leq j < i} S_j \leq x \right\} \cap \{S_i > x\} .$$

IV.2. Montrer que $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_J$ constitue un système complet d'événements.

IV.3. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, démontrer l'inclusion

$$\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i \subset \{S_J > x\} \cap \Omega_i .$$

IV.4. Montrer que

$$P(S_J > x) \geq \sum_{i=1}^{J} P(\{S_J - S_i \geq 0\} \cap \Omega_i) .$$

IV.5. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq J$, que peut-on dire des événements $\{S_J - S_i \geq 0\}$ et Ω_i ?

IV.6. Déduire de IV.1., IV.4. et de IV.5 l'inégalité

$$P\left(\max_{1 \leq j \leq J} S_j > x \right) \leq 2P(S_J > x) .$$

Reprenons la modélisation de la partie I et soulevons le problème suivant. La valeur k que nous avons supposée connue et constante doit être dans la réalité estimée par la compagnie d'assurance à partir de son expérience passée. Elle est donc dans la réalité entachée d'incertitude et susceptible d'augmenter à mesure que le temps passe et que les clients vieillissent. Pour se prémunir contre ce phénomène, il est donc utile d'observer année après année le nombre de décès effectifs et de se doter d'un moyen de décider si on est face à une dérive "anormale" du nombre annuel de décès ou pas (afin de pouvoir agir par exemple en augmentant le montant de la prime d'assurance). Notons X_i le nombre de décès observés durant la $i-$ième année d'un exercice qui en compte 5. On observe chaque j-ième année la valeur prise par la variable aléatoire S_j.

IV.7. On suppose que $k = 10$. Que penser si on constate après la quatrième année d'exercice que $\max_{1 \leq j \leq 4} S_j$ prend la valeur 15 ?

On pourra utiliser que $P(T > 2) \leq 2,5\%$ si T est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.