BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE SUJET :
289
HEC_M3_E

Concepteur : H.E.C.

OPTION : ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 2 Mai 2007, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) ; soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice associée T relativement à cette base s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les valeurs propres de t. Déterminer les sous-espaces propres de t associés, et donner une base de chacun d'entre eux.
L'endomorphisme t est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

L'objet des questions suivantes est une généralisation des résultats précédents.

2. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$. Soit t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ défini par :

- pour tout entier i de $[\![1, 2n+1]\!]$, avec $i \neq n+1$: $t(e_i) = e_1$;
- $t(e_{n+1}) = e_1 + e_2 + \cdots + e_{2n+1}$.

a) Déterminer la matrice T associée à l'endomorphisme t relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n+1})$.

b) Déterminer le rang de t, ainsi que la dimension du noyau de t.

c) Justifier que 0 est valeur propre de t. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0, ainsi qu'une base de ce sous-espace.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(t \circ t) \subset \mathrm{Im}(t)$, où $\mathrm{Im}(u)$ désigne l'image d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

4. Soit $\widetilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\mathrm{Im}(t)$ par : pour tout x de $\mathrm{Im}(t)$, $\widetilde{t}(x) = t(x)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Établir que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(t)$. Écrire la matrice associée à $\widetilde{t}$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

5. a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que x appartient à $\mathrm{Im}(t)$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de t. L'endomorphisme t est-il diagonalisable ?

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont considérées comme définies sur des espaces probabilisés non nécessairement identiques, mais qui, par souci de simplification, seront tous notés $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie I

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2} \times e^{-|x|}$.

a) Montrer que les intégrales $\int_{-\infty}^{0} g(x)dx$ et $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$ sont convergentes et de même valeur.

b) Établir que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit Y une variable aléatoire à valeurs réelles admettant g pour densité. *On dit que* Y *suit la loi* $\mathcal{L}(0)$.

2. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3. a) Montrer, pour tout r de $\mathbb{N}$, l'existence du moment $m_r(Y)$ d'ordre r de la variable aléatoire Y.

b) Calculer, pour tout r de $\mathbb{N}$, $m_r(Y)$ en fonction de r. Quelles sont les valeurs de l'espérance $E(Y)$ et de la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y ?

4. a) Déterminer la fonction de répartition G de Y.

b) Établir que G est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

c) Montrer que l'équation $G(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution que l'on déterminera.

d) Établir que la fonction qui, à tout réel x associe $G(x)(1 - G(x))$, est paire.

5. a) Montrer que l'application réciproque G^{-1} de G est définie par :

$$G^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$$

b) Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Laplace` qui permet de simuler la loi $\mathcal{L}(0)$. On rappelle que la fonction `random` permet de simuler en Pascal une loi uniforme sur $]0, 1[$.

6. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie par :

$$g_n(x) = g(x)(1 + xe^{-n|x|})$$

Montrer que g_n définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n une variable aléatoire de densité g_n, et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

7. a) Établir pour tout réel x, la majoration suivante : $|G_n(x) - G(x)| \leqslant \frac{1}{ne} \times G(x)$.

b) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{L}(0)$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Partie II

Soit θ un paramètre réel inconnu et X une variable aléatoire à densité. *On dit que X suit la loi $\mathcal{L}(\theta)$*, si une densité f de X est donnée par : pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{e^{-|x-\theta|}}{2}$.

Soit n un entier naturel . On considère un $(2n+1)$–échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{L}(\theta)$.

1. a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) En déduire que la variable aléatoire $(X - \theta)$ suit la loi $\mathcal{L}(0)$ définie dans la partie I.

c) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

d) Résoudre l'équation $F(x) = 1/2$.

2. Soit x un réel fixé. Pour tout i de $[\![1, 2n+1]\!]$, on note Z_i la variable aléatoire de Bernoulli telle que $P([Z_i = 1]) = P([X_i \leqslant x])$.

a) Établir l'indépendance des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n+1}$.

b) Soit S_{2n+1} la variable aléatoire définie par : $S_{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} Z_i$. Quelle est la loi de probabilité de S_{2n+1} ? Préciser l'espérance et la variance de S_{2n+1}.

3. On pose $\overline{X}_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{2n+1} X_i$.

a) Montrer que $\overline{X}_{2n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

b) Calculer le risque quadratique de $\overline{X}_{2n+1}$ en θ.

Partie III

Le contexte de cette partie est identique à celui de la partie précédente.

Pour tout ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{2n+1}(\omega)$, et on note $\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \ldots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$, les nombres ainsi rangés, c'est-à-dire que $\widehat{X_1}(\omega) \leqslant \widehat{X_2}(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$. On définit ainsi $(2n+1)$ variables aléatoires $\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \ldots, \widehat{X}_{2n+1}$ telles que $\widehat{X_1} \leqslant \widehat{X_2} \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}$, qui constituent un réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1}$. On admet que $P([\widehat{X_1} < \widehat{X_2} < \cdots < \widehat{X}_{2n+1}]) = 1$.

On s'intéresse dans cette partie à la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

1. a) Pour tout réel x, justifier l'égalité entre événements suivante : $[\widehat{X}_{n+1} \leqslant x] = [S_{2n+1} \geqslant n+1]$.

b) En déduire la fonction de répartition $\widehat{F}_{n+1}$ de $\widehat{X}_{n+1}$ en fonction de F (on exprimera cette fonction sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer).

2. On note $\widehat{f}_{n+1}$ une densité de $\widehat{X}_{n+1}$, et $\widehat{g}_{n+1}$ une densité de $(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) Établir pour tout j de $[\![0, 2n]\!]$, l'égalité suivante : $(j+1)\binom{2n+1}{j+1} = (2n-j+1)\binom{2n+1}{j}$.

b) En déduire, pour tout x réel, l'égalité :

$$\widehat{f}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(F(x))^n(1-F(x))^n f(x)$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

c) Établir, pour tout x réel, l'égalité suivante :

$$\widehat{g}_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}(G(x))^n(1-G(x))^n g(x)$$

où g et G ont été définies dans la partie I.

d) En utilisant la question I.4.d, montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur sans biais du paramètre θ.

3. *Dans cette question, on étudie le comportement de la suite* $(\widehat{X}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

On désigne par $\widehat{h}_{n+1}$ une densité de la variable aléatoire $\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta)$.

a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times \left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)^n \times g\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

b) Écrire, lorsque u tend vers 0, le développement limité à l'ordre 2 de e^{-u}, et le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-u)$.

c) Soit x un réel fixé. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{2n+1}+o\left(\frac{1}{(2n+1)}\right)\right)$$

d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n\left[G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\left(1-G\left(\frac{x}{\sqrt{2n+1}}\right)\right)\right]^n = e^{-x^2/2}$.

e) On admet que lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\binom{2n}{n} \times \frac{1}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Montrer alors que pour tout réel x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \widehat{h}_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

4. On admet que le résultat de la question précédente entraîne la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(\sqrt{2n+1}(\widehat{X}_{n+1}-\theta))_n$ vers une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer qu'un intervalle de confiance $[I_n, J_n]$ pour le paramètre θ au risque $\alpha = 0.05$, est donné par :

$$I_n = \widehat{X}_{n+1} - \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad J_n = \widehat{X}_{n+1} + \frac{1.96}{\sqrt{2n+1}}$$

(on rappelle que si Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a $\Phi(1.96) \approx 0.975$).

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

HEC, ESCP, LYON 2007 VOIE ECO

CORRIGE

EXERCICE

1)

- Le réel λ est valeur propre de T (et de t) si et seulement si l'équation $(T-\lambda I_3)X=(0)$ d'inconnue $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ admet une autre solution que la solution $X=(0)$.

$$(T-\lambda I_3)X=(0) \iff \begin{cases}(1-\lambda)x+y+z &=0\\ (1-\lambda)y &=0\\ y-\lambda z &=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(1-\lambda)x+z+y &=0\\ -\lambda z+y &=0\\ (1-\lambda)y &=0\end{cases} \qquad \textbf{(S)}$$

Ce système est triangularisé : il admet une autre solution que la solution nulle si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul.

Les valeurs propres de T sont 0 et 1

- Détermination des sous-espaces propres $E(\lambda,t)$

$*$ Pour $\lambda=0$, on doit résoudre le système **(S)** ; on obtient

$$u=(x,y,z)\in E(0,t) \iff \begin{cases}x+y+z &=0\\ y &=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}z &=-x\\ y &=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(0,t) &=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=-x, y=0\}\\ &=\{u=(x,0,-x)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$E(0,t)=\text{vect}((1,0,-1))$: $\dim E(0,t)=1$ puisque $(1,0,-1)\neq(0,0,0)$

$*$ Pour $\lambda=1$.

$$u=(x,y,z)\in E(1,t) \iff \begin{cases}z+y &=0\\ -z+y &=0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y &=0\\ z &=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(1,t) &=\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z=y=0\}\\ &=\{u=(x,0,0)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

$E(1,t)=\text{vect}((1,0,0))$: $\dim E(1,t)=1$ puisque $(1,0,0)\neq(0,0,0)$

$\dim E(0,t)+\dim E(1,t)=2\neq\dim\mathbb{R}^3$: l'endomorphisme t n'est pas diagonalisable

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

- $\operatorname{Ker} t = \operatorname{Ker}(t - 0\operatorname{Id}_E) = E(0,t) \neq \{0_E\}$: $\boxed{t \text{ n'est pas injectif, donc il n'est pas bijectif}}$

Remarque : On aurait pu dire aussi : 0 est valeur propre de t, donc t n'est pas bijectif.

2.a)

Nous noterons $E = \mathbb{R}^{2n+1}$.

Ecrivons la matrice T de t dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ de E.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $i \in [\![1, 2n+1]\!]$, on a écrit en colonnes les coordonnées de $t(e_i)$ dans la base canonique de E :

si $i \neq n+1$, alors $t(e_i) = (1, 0, \dots, 0)$ et $t(e_{n+1}) = (1, 1 \dots, 1)$.

2.b)

On sait d'après le cours que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} t &= \operatorname{vect}(t(e_1), t(e_2), \dots, t(e_{n+1}), \dots, t(e_{2n}), t(e_{2n+1})) \\ &= \operatorname{vect}(e_1, e_1, \dots, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k, e_1, \dots, e_1) \\ &= \operatorname{vect}(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \end{aligned}$$

Ces deux vecteurs ne sont évidemment pas proportionnels, donc

$$\boxed{\operatorname{Im} t = \operatorname{vect}(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \text{ et } \dim \operatorname{Im} t = 2}$$

D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} t = 2n + 1 - \dim \operatorname{Im} t = 2n - 1}$

2.c)

Nous savons que $2n - 1 \geq 1$ puisque $n \geq 1$, donc $\operatorname{Ker} t \neq \{0_E\}$: c'est donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$.

Pour donner une base de $E(0,t) = \operatorname{Ker} t$, il suffit de trouver $2n-1$ vecteurs de $\operatorname{Ker} t$ linéairement indépendants.

D'après l'énoncé, $\forall k \in [\![2, 2n+1]\!],\ k \neq n+1$, on a $t(e_k) = t(e_1)$, ce qui veut dire $t(e_1) - t(e_k) = 0_E$, soit $t(e_1 - e_k) = 0_E$

Cela signifie que le vecteur $u_k = e_1 - e_k$ pour $k \in [\![2, 2n+1]\!],\ k \neq n+1$, est un vecteur de $\operatorname{Ker} t$. Puisque k peut prendre $2n-1$ valeurs (les $2n$ valeurs de $[\![2, 2n+1]\!]$ exceptée la valeur $n+1$), on a ainsi obtenu $2n-1$ vecteurs de $\operatorname{Ker} t$.

Vérifions que ces vecteurs forment une famille libre de E.

Soit $(a_2, \dots, a_n, a_{n+2}, \dots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que $\sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} a_k u_k = 0_E$. Cette égalité équivaut successsivement à :

$\sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} a_k(e_1 - e_k) = 0_E$

$(\sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} a_k)e_1 - \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq n+1}}^{2n+1} a_k e_k$, soit finalement à

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

$\sum_{\substack{k=2\\k\neq n+1}}^{2n+1} a_k = 0$ et $\forall k \ / \ k \in [\![2, 2n+1]\!] - \{n+1\},\ a_k = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots e_n, e_{n+2}, \dots, e_{2n+1})$ est une famille libre en tant que sous-famille de la base canonique.

On obtient immédiatement que $\forall k \in [\![2, 2n+1]\!] - \{n+1\},\ a_k = 0$.

> La famille u_k pour $2 \leq k \leq 2n+1,\ k \neq n+1$ est une famille libre de $2n-1$ vecteurs dans un espace de dimension $2n-1$: c'en est donc une base.
>
> $E(0,t)$ a donc pour dimension $2n-1$ et pour base la famille u_k où $u_k = e_1 - e_k$ pour $2 \leq k \leq 2n+1,\ k \neq n+1$
>
> $$E(0,t) = \text{vect}(u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+2}, \dots, u_{2n+1}) \text{ avec } u_k = e_1 - e_k$$

3)

$\forall v \in \text{Im}(t \circ t),\ \exists\, u \in E \ / \ v = (t \circ t)(u)$; or $(t \circ t)(u) = t(t(u))$ et puisque $t(u)$ est un vecteur de E, si on le note w, on aura $v = t(w)$. Ceci prouve que $v \in \text{Im}\, t$.

> $\forall v \in \text{Im}(t \circ t),\ v \in \text{Im}\, t$ veut dire $\text{Im}(t \circ t) \subset \text{Im}\, t$

4)

- $\mathcal{B} = (e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k)$ est une base de $\text{Im}\, t$ résulte de la question **2.b)**. Pour écrire la matrice de $\widetilde{t}$, nous devons exprimer $\widetilde{t}(e_1)$ et $\widetilde{t}(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}(e_1) &= t(e_1) = e_1 \\
\widetilde{t}(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k) &= t(\sum_{k=1}^{2n+1} e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} t(e_k) \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{2n+1} t(e_k) + t(e_{n+1}) \\
&= \sum_{\substack{k=1\\k\neq n+1}}^{2n+1} e_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} e_k \\
&= 2ne_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} e_k
\end{aligned}$$

> Il en résulte que $C = \text{Mat}\,(\widetilde{t}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.a)

Si λ est une valeur propre non nulle de t et x un vecteur propre associé, on a $t(x) = \lambda x$. Puisque $\lambda \neq 0$, on peut diviser les deux membres par λ ; il vient $x = \frac{1}{\lambda} t(x) = t(\frac{1}{\lambda} x)$ par linéarité. Si on pose $y = \frac{1}{\lambda} x$, on constate bien sûr que $y \in E$ et on a $x = t(y)$. Cela prouve que $\boxed{x \in \text{Im}\, t}$

5.b)

Recherchons les valeurs **non nulles** de t. Les vecteurs propres associés sont dans $\text{Im}\, t$.

$\lambda \neq 0$ est valeur propre de t si et seulement s'il existe un vecteur non nul x appartenant à $\text{Im}\, t$ tel que $t(x) = \lambda x$, donc si et seulement si il existe un vecteur non nul x appartenant à $\text{Im}\, t$ tel que $\widetilde{t}(x) = \lambda x$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Cela revient à chercher les valeurs propres non nulles de $\widetilde{t}$.

D'après la matrice C de $\widetilde{t}$ dans la base $\mathcal{B}$, $\widetilde{t}$ n'admet qu'une seule valeur propre , c'est $\lambda = 1 \neq 0$.

Soit u un vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont (a, b)

$$\begin{aligned} \widetilde{t}(u) = u &\iff 2nb &= 0 \\ &\iff b &= 0 \end{aligned}$$

$E(1,\widetilde{t}) = E(1,t) = \text{vect}(e_1)$: $\dim E(1,t) = 1$

$\dim E(0,t) + \dim E(1,t) = 2n - 1 + 1 = 2n \neq \dim E$:

t n'est pas diagonalisable

PROBLEME

PARTIE I

I–1.a)

Remarquons que $x \mapsto -|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto |x|$ l'est, puis remarquons que exp est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$; remarquons également que g est une fonction paire. **Il en résulte que $\int_{-\infty}^{0} g(x)dx$ converge si et seulement si $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx$ converge. Dans ces conditions ces deux intégrales ont la même valeur.**

• • • Pour les étudiants qui ne connaissent pas ce résultat : soit h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Supposons h paire.

Soit $a < 0$; $I(a) = \int_{a}^{0} h(x)dx$. Effectuons le changement de variable affine $t = -x$; $dt = -dx$ et dans ces conditions,

$$\begin{aligned} I(a) &= -\int_{-a}^{0} h(-t)dt = -\int_{-a}^{0} h(t)dt \quad \text{car la fonction } h \text{ est paire} \\ &= \int_{0}^{-a} h(t)dt \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge si et seulement si $\lim_{a\to-\infty} I(a)$ existe et est réelle, donc si et seulement si $\lim_{a\to-\infty} \int_{0}^{-a} h(t)dt$ existe et est réelle, donc (puisque $-a \to +\infty$) si et seulement si **l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} h(t)dt$ converge.**

Dans notre cas $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \exp(-x)dx = \frac{1}{2}$, car on aura reconnu l' intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{2}$$

Remarque : La même démonstration montrerait que si h est une fonction impaire, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} h(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} h(t)dt$ converge et que dans ces conditions ces deux intégrales sont opposées.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.