VARIABLES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXIII

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.

On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit X la variable aléatoire réelle prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage, on a obtenu au moins une fois tous les numéros. Si cette situation ne se présente pas, X prend la valeur 0.

b) Quelles sont la loi et l'espérance de X quand $N = 1$?

On suppose dans toute la suite que $N \geq 2$.

2) Déterminer $P(X = 1),\ P(X = 2), \ldots, P(X = N)$.

Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X > k) = \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{j-1} (N - j)^k$$

Vérifier que cette formule est valable pour $k = 0$.

De quelle façon obtient-on la loi de X ? (ne pas effectuer le calcul)

Calculer $P(X = 0)$.

3) *On admet qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(T > k)$ est convergente et qu'en ce cas* $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k)$.

Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = N \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{N}{j}$

4) Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^N - 1}{x} dx$. En déduire que $E(X) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

5) Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant N variables aléatoires de lois géométriques.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXII

1)

Si $N = 1$, on ne tire que le numéro 1. Donc X ne prend que la valeur 1 car c'est uniquement au premier tirage que l'on tire un numéro non encore sorti.

X est la variable certaine égale à 1. $E(X) = 1$

2)

- On peut remarquer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $(X = k) = \emptyset$. En effet, on ne peut pas avoir sorti les N numéros (même pour la première fois au k^{me} tirage) en strictement moins de N tirages.

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = N-1) = 0.$$

L'événement $(X = N)$ est : on a tiré tous les numéros au moins une fois et pour la première fois au $N^{\text{ème}}$ tirage. Cela veut dire que les $N-1$ premiers tirages ont fait apparaître $N-1$ numéros différents et le $N^{\text{ème}}$ tirage le dernier numéro non encore sorti. Cela veut dire qu'au cours des N tirages ont a tiré une fois et une seule tous les numéros. Si l'on prend pour univers associé à cette expérience l'ensemble Ω des $N-$listes formées avec les N premiers entiers non nuls, alors $\Omega = [\![1, N]\!]^N$ muni de la probabilité uniforme et $(X = N)$ est constitué des permutations des N premiers entiers non nuls.

$$P(X = N) = \frac{N!}{N^N}$$

- L'événement $(X > k)$ est : au cours des k premiers tirages on n'a pas obtenu les N numéros, ce qui veut dire à l'issue des k premiers tirages il y a au moins un numéro qui n'a pas été tiré.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, posons A_i l'événement : à l'issue des k premiers tirages le numéro i n'a pas été tiré. Alors $(X > k) = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$.

Appliquons la formule du crible.

$$P(X > k) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) \qquad \textbf{(1)}$$

L'événement $(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j})$ est : au cours des k premiers tirages on n'a pas tiré les numéros $i_1, \ldots i_j$, donc les k premiers tirages ont eu lieu parmi les $N-j$ autres numéros ; $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \dfrac{(N-j)^k}{N^k}$ puisque les tirages se faisant avec remise, on est en droit de penser qu'ils sont mutuellement indépendants.

$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} \dfrac{(N-j)^k}{N^k}$. Il s'agit de savoir combien de termes comporte cette somme : autant que de façons de choisir j numéros distincts (les j indices) parmi N – cela en fait $\binom{N}{j}$ – et de les ranger dans l'ordre strictement croissant (une seule façon de faire).

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \binom{N}{j} \frac{(N-j)^k}{N^k}$$

L'égalité (1) donne

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.