



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### VARIABLES DISCRETES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXXIII

Une urne contient  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ ,  $N$  étant un entier naturel non nul. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit  $X$  la variable aléatoire réelle prenant la valeur  $k \in \mathbb{N}^*$  si, pour la première fois au  $k^{\text{ème}}$  tirage, on a obtenu au moins une fois tous les numéros. Si cette situation ne se présente pas,  $X$  prend la valeur 0.

b) Quelles sont la loi et l'espérance de  $X$  quand  $N = 1$  ?

*On suppose dans toute la suite que  $N \geq 2$ .*

2) Déterminer  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$ , ...,  $P(X = N)$ .

Etablir que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P(X > k) = \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^N \binom{N}{j} (-1)^{j-1} (N-j)^k$$

Vérifier que cette formule est valable pour  $k = 0$ .

De quelle façon obtient-on la loi de  $X$  ? (ne pas effectuer le calcul)

Calculer  $P(X = 0)$ .

3) *On admet qu'une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  admet une espérance si et seulement si la série de terme général  $P(T > k)$  est convergente et qu'en ce cas*

$$E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k).$$

Montrer que  $X$  admet une espérance et que  $E(X) = N \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{N}{j}$

4) Calculer  $\int_{-1}^0 \frac{(1+x)^N - 1}{x} dx$ . En déduire que  $E(X) = N \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$ .

5) Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant  $N$  variables aléatoires de lois géométriques.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXII

1)

Si  $N = 1$ , on ne tire que le numéro 1. Donc  $X$  ne prend que la valeur 1 car c'est uniquement au premier tirage que l'on tire un numéro non encore sorti.

$$X \text{ est la variable certaine égale à } 1. E(X) = 1$$

2)

• On peut remarquer que pour tout  $k \in [1, N - 1]$ ,  $(X = k) = \emptyset$ . En effet, on ne peut pas avoir sorti les  $N$  numéros (même pour la première fois au  $k^{\text{me}}$  tirage) en strictement moins de  $N$  tirages.

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = N - 1) = 0.$$

L'événement  $(X = N)$  est : on a tiré tous les numéros au moins une fois et pour la première fois au  $N^{\text{eme}}$  tirage. Cela veut dire que les  $N - 1$  premiers tirages ont fait apparaître  $N - 1$  numéros différents et le  $N^{\text{eme}}$  tirage le dernier numéro non encore sorti. Cela veut dire qu'au cours des  $N$  tirages on a tiré une fois et une seule tous les numéros. Si l'on prend pour univers associé à cette expérience l'ensemble  $\Omega$  des  $N$ -listes formées avec les  $N$  premiers entiers non nuls, alors  $\Omega = [1, N]^N$  muni de la probabilité uniforme et  $(X = N)$  est constitué des permutations des  $N$  premiers entiers non nuls.

$$P(X = N) = \frac{N!}{N^N}$$

• L'événement  $(X > k)$  est : au cours des  $k$  premiers tirages on n'a pas obtenu les  $N$  numéros, ce qui veut dire à l'issue des  $k$  premiers tirages il y a au moins un numéro qui n'a pas été tiré.

Pour tout  $i \in [1, N]$ , posons  $A_i$  l'événement : à l'issue des  $k$  premiers tirages le numéro  $i$  n'a pas été tiré. Alors  $(X > k) = \bigcup_{i=1}^N A_i$ .

Appliquons la formule du crible.

$$P(X > k) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) \quad (1)$$

L'événement  $(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j})$  est : au cours des  $k$  premiers tirages on n'a pas tiré les numéros  $i_1, \dots, i_j$ , donc les  $k$  premiers tirages ont eu lieu parmi les  $N - j$  autres numéros ;  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) = \frac{(N - j)^k}{N^k}$  puisque les tirages se font avec remise, on est en droit de penser qu'ils sont mutuellement indépendants.

$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N} \frac{(N - j)^k}{N^k}$ . Il s'agit de savoir combien de termes comporte cette somme : autant que de façons de choisir  $j$  numéros distincts (les  $j$  indices) parmi  $N - j$  – cela en fait  $\binom{N - j}{j}$  – et de les ranger dans l'ordre strictement croissant (une seule façon de faire).

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}) = \binom{N - j}{j} \frac{(N - j)^k}{N^k}$$

L'égalité (1) donne

page 2

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.