VARIABLES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXIII

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.

On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise.

Soit X la variable aléatoire réelle prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, pour la première fois au k ème tirage, on a obtenu au moins une fois tous les numéros. Si cette situation ne se présente pas, X prend la valeur 0.

b) Quelles sont la loi et l'espérance de X quand $N = 1$?

On suppose dans toute la suite que $N \geq 2$.

2) Déterminer $P(X = 1)$, $P(X = 2), \ldots, P(X = N)$.

Etablir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X > k) = \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^{N} \binom{N}{j} (-1)^{j-1}(N-j)^k$$

Vérifier que cette formule est valable pour $k = 0$.

De quelle façon obtient-on la loi de X ? (ne pas effectuer le calcul)

Calculer $P(X = 0)$.

3) *On admet qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(T > k)$ est convergente et qu'en ce cas* $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k)$.

Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = N \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \binom{N}{j}$

4) Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^N - 1}{x} dx$. En déduire que $E(X) = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

5) Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant N variables aléatoires de lois géométriques.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXII

1)

Si $N = 1$, on ne tire que le numéro 1. Donc X ne prend que la valeur 1 car c'est uniquement au premier tirage que l'on tire un numéro non encore sorti.

$$\boxed{X \text{ est la variable certaine égale à } 1.\ E(X) = 1}$$

2)

- On peut remarquer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $(X = k) = \emptyset$. En effet, on ne peut pas avoir sorti les N numéros (même pour la première fois au k^{me} tirage) en strictement moins de N tirages.

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \cdots = P(X = N - 1) = 0.$$

L'événement $(X = N)$ est : on a tiré tous les numéros au moins une fois et pour la première fois au $N^{\text{ème}}$ tirage. Cela veut dire que les $N - 1$ premiers tirages ont fait apparaître $N - 1$ numéros différents et le $N^{\text{ème}}$ tirage le dernier numéro non encore sorti. Cela veut dire qu'au cours des N tirages ont a tiré une fois et une seule tous les numéros. Si l'on prend pour univers associé à cette expérience l'ensemble Ω des $N-$listes formées avec les N premiers entiers non nuls, alors $\Omega = [\![1, N]\!]^N$ muni de la probabilité uniforme et $(X = N)$ est constitué des permutations des N premiers entiers non nuls.

$$P(X = N) = \frac{N!}{N^N}$$

- L'événement $(X > k)$ est : au cours des k premiers tirages on n'a pas obtenu les N numéros, ce qui veut dire à l'issue des k premiers tirages il y a au moins un numéro qui n'a pas été tiré.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, posons A_i l'événement : à l'issue des k premiers tirages le numéro i n'a pas été tiré. Alors $(X > k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} A_i$.

Appliquons la formule du crible.

$$P(X > k) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) \qquad \mathbf{(1)}$$

L'événement $(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j})$ est : au cours des k premiers tirages on n'a pas tiré les numéros $i_1, \ldots i_j$, donc les k premiers tirages ont eu lieu parmi les $N - j$ autres numéros ; $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \dfrac{(N-j)^k}{N^k}$ puisque les tirages se faisant avec remise, on est en droit de penser qu'ils sont mutuellement indépendants.

$\displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} \frac{(N-j)^k}{N^k}$. Il s'agit de savoir combien de termes comporte cette somme : autant que de façons de choisir j numéros distincts (les j indices) parmi N – cela en fait $\dbinom{N}{j}$ – et de les ranger dans l'ordre strictement croissant (une seule façon de faire).

$$\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq N} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \binom{N}{j} \frac{(N-j)^k}{N^k}$$

L'égalité (1) donne