



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ESPACES EUCLIDIENS

ENONCE DE L'EXERCICE-XXXV

Dans l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas n . On munit E du produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1) Pour tout polynôme P de E , on note $s(P)$ le polynôme tel que pour tout réel x :

$$s(P)(x) = P(1-x).$$

- Montrer que s définit un endomorphisme de E .
 - Expliciter, pour $P \in E$, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de P .
 - Qu'en déduit-on pour la matrice de s dans la base canonique de E ?
 - Montrer que s est diagonalisable.
- 2) Soit d l'application de E dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in E, d(P) = X(1-X)P'' - (2X-1)P'$$

a) Vérifier que d est un endomorphisme de E et que

$$\forall (P, Q) \in E^2, \langle d(P), Q \rangle = - \int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)dx$$

- L'endomorphisme d admet-il 0 pour valeur propre ? Si oui, préciser l'espace propre associé.
 - Montrer que les valeurs propres non nulles de d sont strictement négatives.
 - Montrer que d est diagonalisable.
- 3-a) Montrer que les sous-espaces propres de s sont stables par d .
- b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres communs à s et d .