ESPACES EUCLIDIENS

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXV

Dans l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas n. On munit E du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in \ E^2,\ \langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1) Pour tout polynôme P de E, on note $s(P)$ le polynôme tel que pour tout réel x :

$$s(P)(x) = P(1-x).$$

a) Montrer que s définit un endomorphisme de E.

b) Expliciter, pour $P \in E$, le degré de $s(P)$ en fonction de celui de P.

c) Qu'en déduit-on pour la matrice de s dans la base canonique de E ?

d) Montrer que s est diagonalisable.

2) Soit d l'application de E dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in E,\ d(P) = X(1-X)P'' - (2X-1)P'$$

a) Vérifier que d est un endomorphisme de E et que

$$\forall (P,Q) \in \ E^2,\ \langle d(P),Q \rangle = -\int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)dx$$

b) L'endomorphisme d admet-il 0 pour valeur propre ? Si oui, préciser l'espace propre associé.

c) Montrer que les valeurs propres non nulles de d sont strictement négatives.

d) Montrer que d est diagonalisable.

3–a) Montrer que les sous-espaces propres de s sont stables par d.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres communs à s et d.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.