ESPACE EUCLIDIEN

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXII

Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. On considère l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ et du produit scalaire canonique associé noté $\langle\, ,\rangle$. On désigne par $||\,||$ la norme associée. L'ensemble $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre p. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, associée canoniquement à l'endomorphisme f, est positive si et seulement si elle est symétrique et si $\forall x \in \ E,\ \langle f(x), x\rangle \geq 0$, ce qui peut aussi s'ecrire matriciellement $\langle AC, C\rangle = {}^t(AC)C$ où C est la matrice colonne canoniquement associée à x. On écrira $A \succeq 0$.

1–a) Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Prouver que les matrices $({}^tT)T$ et $T({}^tT)$ sont positives.

2) Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donnée.

a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ orthogonale telle que la matrice $D = ({}^tP)AP$ soit diagonale.

Montrer que si X est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive, alors la matrice $Y = ({}^tP)XP$ est positive.

b) Prouver qu'une matrice positive X de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est solution de l'équation $X^2 = A$ si et seulement si la matrice positive $Y = ({}^tP)XP$ est solution de l'équation $Y^2 = D$.

c) Soit α un réel strictement positif et Y une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ positive ; montrer que la matrice $Y + \alpha I_p$ est inversible (I_p est la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

Résoudre l'équation $Y^2 = D$ avec $Y \succeq 0$.

d) En déduire qu'il existe une unique matrice positive $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui est solution de l'équation $X^2 = A$. On définit ainsi la racine carrée de A et on la note $\sqrt{A}$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Montrer que A est positive.

b) Déterminer sa racine carrée .

