ESPACE EUCLIDIEN

ENONCE DE L'EXERCICE–XIX

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique ; le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$ et $|| \ ||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on notera X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on notera $||X|| = ||x||$. De même si X et Y sont les matrices colonnes de x et de y, on notera $\langle X, Y\rangle = \langle x, y\rangle$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

A toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$, on associé l'ensemble $\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||AX|| = 1\}$.

1) Déterminer $\mathcal{E}(P)$ lorsque P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si, pour tout vecteur x non nul de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle SX, X\rangle > 0$.

2) Montrer que S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cet exercice, S et S' sont deux matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

3) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $||SX|| = ||S'X||$.

4) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(||x+y||^2 - ||x-y||^2\Big)$$

En déduire que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $\langle SX, SY\rangle = \langle S'X, S'Y\rangle$.

5) Montrer que $S^2 = S'^2$ (on pourra utiliser une base de diagonalisation de S).

6–a) Soit λ une valeur propre de S. Montrer que $\operatorname{Ker}(S - \lambda I) = \operatorname{Ker}(S^2 - \lambda^2 I)$.

b) En déduire que $S = S'$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XIX

1)

Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle que P est orthogonale si et seulement si ${}^tP.P = I_n$.
Soit maintenant un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{array}{rl} {}^tX{}^tPPX & = {}^tXI_nX \\ {}^t(PX)(PX) & = {}^tXX \\ ||PX||^2 & = ||X||^2 \end{array}$$

Et puisque les normes sont positives ou nulles,

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } P \text{ est une matrice orthogonale de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ alors} \\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||PX|| = ||X|| \\ \text{Donc } \mathcal{E}(P) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ /\ ||X|| = 1\} \end{array}}$$

2)

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Sens direct.

La matrice S est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre.
Considérons un vecteur propre X_i associé à la valeur propre λ_i : $SX_i = \lambda_i X_i$.
Donc $\langle X_i, SX_i\rangle = \langle X_i, \lambda_i X_i\rangle = \lambda_i ||X_i||^2$. Or $X_i \neq (0)$ donc $||X_i||^2 > 0$. Il s'ensuit que $\lambda_i = \dfrac{\langle X_i, SX_i\rangle}{||X_i||^2} > 0$ puisque le numérateur l'est par l'hypothèse sur S et le dénominateur également.

$$S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lambda_i > 0 \text{ pour tout } i \in [\![1, r]\!]$$

- Réciproquement.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ dont les valeurss propres sont strictement positives. Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre et E_i le sous-espace propre de S associé à la valeur propre λ_i.

La matrice S est diagonalisable puisque symétrique réelle donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus\limits_{i}^{r} E_i$.

Pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists!(X_1, \dots, X_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r\ /\ X = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$.

$SX = \sum\limits_{i=1}^{r} SX_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$.

Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc
$\forall (i, j) \in [\![1, r]\!]^2,\ \langle X_i, X_j\rangle = 0$. Il en résulte que

$\langle X, SX\rangle = \langle \sum\limits_{i=1}^{r} X_i, \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i X_i\rangle = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i \langle X_i, X_i\rangle$, donc

$$\langle X, SX\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i ||X_i||^2.$$

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ \lambda_i > 0 \Longrightarrow \langle X, SX\rangle \geq 0. \qquad (1)$$

De plus $X \neq (0) \iff \exists\, j \in [\![1, r]\!]\ /\ X_j \neq (0)$. Comme tous les termes de la somme $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i ||X_i||^2$ sont positifs ou nuls, on a l'inégalité $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i ||X_i||^2 \geq \lambda_j ||X_j||^2 > 0$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.