



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ESPACE EUCLIDIEN

ENONCE DE L'EXERCICE – XIX

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique ; le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y \rangle$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si x est un vecteur de \mathbb{R}^n , on notera X la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de \mathbb{R}^n et on notera $\|X\| = \|x\|$. De même si X et Y sont les matrices colonnes de x et de y , on notera $\langle X, Y \rangle = \langle x, y \rangle$.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et par $S_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.

A toute matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$, on associe l'ensemble $\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|AX\| = 1\}$.

1) Déterminer $\mathcal{E}(P)$ lorsque P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si, pour tout vecteur x non nul de \mathbb{R}^n , on a $\langle SX, X \rangle > 0$.

2) Montrer que S est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cet exercice, S et S' sont deux matrices de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

3) Soit x un vecteur non nul de \mathbb{R}^n . Montrer que $\|SX\| = \|S'X\|$.

4) Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$

En déduire que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a $\langle SX, SY \rangle = \langle S'X, S'Y \rangle$.

5) Montrer que $S^2 = S'^2$ (on pourra utiliser une base de diagonalisation de S).

6-a) Soit λ une valeur propre de S . Montrer que $\text{Ker}(S - \lambda I) = \text{Ker}(S^2 - \lambda^2 I)$.

b) En déduire que $S = S'$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XIX

1)

Soit P une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que P est orthogonale si et seulement si ${}^t P \cdot P = I_n$.

Soit maintenant un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} {}^t X {}^t P P X &= {}^t X I_n X \\ {}^t (PX) (PX) &= {}^t X X \\ \|PX\|^2 &= \|X\|^2 \end{aligned}$$

Et puisque les normes sont positives ou nulles,

Si P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PX\| = \|X\|$$

Donc $\mathcal{E}(P) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \|X\| = 1\}$

2)

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- Sens direct.

La matrice S est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle. Soit $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre.

Considérons un vecteur propre X_i associé à la valeur propre λ_i : $SX_i = \lambda_i X_i$.

Donc $\langle X_i, SX_i \rangle = \langle X_i, \lambda_i X_i \rangle = \lambda_i \|X_i\|^2$. Or $X_i \neq (0)$ donc $\|X_i\|^2 > 0$. Il s'ensuit que $\lambda_i = \frac{\langle X_i, SX_i \rangle}{\|X_i\|^2} > 0$ puisque le numérateur l'est par l'hypothèse sur S et le dénominateur également.

$$S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \implies \lambda_i > 0 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, r \rrbracket$$

- Réciproquement.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Notons $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre et E_i le sous-espace propre de S associé à la valeur propre λ_i .

La matrice S est diagonalisable puisque symétrique réelle donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_i^r E_i$.

Pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\exists ! (X_1, \dots, X_r) \in E_1 \times \dots \times E_r / X = \sum_{i=1}^r X_i$.

$$SX = \sum_{i=1}^r SX_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i.$$

Les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \langle X_i, X_j \rangle = 0$. Il en résulte que

$$\langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^r X_i, \sum_{i=1}^r \lambda_i X_i \right\rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle X_i, X_i \rangle, \text{ donc}$$

$$\langle X, SX \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i > 0 \implies \langle X, SX \rangle \geq 0. \quad (1)$$

De plus $X \neq (0) \iff \exists j \in \llbracket 1, r \rrbracket / X_j \neq (0)$. Comme tous les termes de la somme

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 \text{ sont positifs ou nuls, on a l'inégalité } \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 \geq \lambda_j \|X_j\|^2 > 0$$