



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### MATRICES ; FONCTIONS DE 2 VARIABLES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXXIV

On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre 2, symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

1) Donner un exemple d'élément de  $\mathcal{T}$ .

2) Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $U \cdot {}^t U$  est élément de  $\mathcal{T}$ .

3-a) Réciproquement, soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  de rang égal à 1. Montrer qu'il existe deux vecteurs  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tels que  $M = U \cdot {}^t V$ .

b) On suppose de plus que  $M$  est symétrique. Montrer que la famille  $(U, V)$  est liée.

c) En déduire que si  $M$  est élément de  $\mathcal{T}$ , alors il existe un vecteur  $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  tel que  $M = X \cdot {}^t X$ .

On définit l'application  $\psi$  sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Soit  $p$  un réel appartenant à  $]0, \frac{1}{2}[$  et  $q = 1 - p$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ .

Dans ce qui suit, on cherche à déterminer  $\inf_{M \in \mathcal{T}} \psi(A - M)$ .

4-a) Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Exprimer  $F(x, y) = \psi(A - U \cdot {}^t U)$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

b) Déterminer les points critiques de  $F$ .

c) En déduire les extremums de  $F$ .

d) En déduire le minimum de  $\psi(A - U \cdot {}^t U)$ , lorsque  $U$  décrit  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

5) Répondre à la question posée.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXIV

1) \_\_\_\_\_

La matrice  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  appartient à  $\mathcal{T}$ . En effet, elle est symétrique. Un calcul facile montre que ses valeurs propres sont 0 et 2. Le rang de  $J$  vaut 1 car les colonnes sont non nulles et égales.

2) \_\_\_\_\_

Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  ;  $T = U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$

Cette matrice est symétrique.

Les deux colonnes sont proportionnelles à  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , donc  $\text{rang}(U) \leq 1$

Cherchons les valeurs propres de  $T$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\lambda$  est valeur propre de  $T$  si et seulement si  $\text{rang}(U({}^tU) - \lambda I_2) \leq 1$ .

$$\begin{aligned} U({}^tU) - \lambda I_2 &= \begin{pmatrix} x^2 - \lambda & xy \\ xy & y^2 - \lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ x^2 - \lambda & xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\* Si  $x = 0$ ,  $U({}^tU) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont 0 et  $y^2$  (peut-être confondues) : elles sont positives ou nulles.

\* Si  $y = 0$ ,  $U({}^tU) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Les valeurs propres sont 0 et  $x^2$  : elles sont positives ou nulles.

\* Si  $xy \neq 0$ , effectuons  $L_2 \leftarrow xyL_2 - (x^2 - \lambda)L_1$ .

$$U({}^tU) - \lambda I_2 \sim \begin{pmatrix} xy & y^2 - \lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (xy)^2 - (x^2 - \lambda)(y^2 - \lambda) \\ &= x^2y^2 - (x^2y^2 - \lambda(x^2 + y^2) + \lambda^2) \\ &= \lambda(-\lambda + (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont 0 et  $x^2 + y^2$  : elles sont positives ou nulles.

Dans tous les cas,  $\text{spect}(T) \subset \mathbb{R}_+$

La matrice  $U({}^tU)$  appartient à  $\mathcal{T}$

3-a) \_\_\_\_\_

Soit  $B = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\varphi$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ .

$\text{rang}(M) = 1 \iff \text{rang}(\varphi) = 1$ . Il existe donc  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  tel que  $\text{Im } \varphi = \text{vect}(v)$ . Il en résulte que :

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  tel que  $\varphi(e_1) = \lambda v$  et  $\varphi(e_2) = \mu v$ .

$$M = \text{Mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu a \\ \lambda b & \mu b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (\lambda \quad \mu).$$