



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### SERIES ; INTEGRALES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXXI

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  à valeurs réelles et  $\lambda$  un réel donné. On définit une suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 0}$ , définies sur l'intervalle  $[0; 1]$ , par :

$$\text{Pour tout } x \in [0; 1] \quad \begin{cases} u_0(x) & = f(x) \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) & = \int_0^x \lambda u_n(t) dt \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n$  est de classe  $C^n$  sur  $[0; 1]$  et donner, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les différentes dérivées  $u_n^{(k)}$  de  $u_n$ . En déduire

$$u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda^{n+1} \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt$$

2-a) Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ , la série de terme général  $u_n(x)$  est convergente.

b) Soit  $u$  un réel. Montrer qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|u|^k}{k!} \leq \frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Exprimer  $\sum_{k=0}^n u_k(x)$  à l'aide d'une intégrale.

d) Soit  $t \in [0; x]$  et  $x \in [0; 1]$ .

En écrivant  $e^{\lambda(x-t)}$  sous forme d'une série, exprimer  $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  en fonction de

$$f(x), e^x \text{ et } \int_0^x e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXI

1) \_\_\_\_\_

- Procédons par récurrence.

Pour  $n = 0$ , la fonction  $u_0$  vaut  $f$ , donc  $u_0 \in C^0([0; 1], \mathbb{R})$  par hypothèse.

Supposons que pour un entier  $n$  donné,  $u_n \in C^n([0; 1], \mathbb{R})$ .

$$\forall x \in [0; 1], u_{n+1}(x) = \int_0^x \lambda u_n(t) dt. \text{ Donc } \forall x \in [0; 1], u'_{n+1}(x) = \lambda u_n(x).$$

Ce qui s'écrit :  $u'_{n+1} = \lambda u_n$ .

Par hypothèse de récurrence,  $u_n \in C^n([0; 1], \mathbb{R})$ , donc  $u'_{n+1}$  aussi et par suite

$u_{n+1} \in C^{n+1}([0; 1], \mathbb{R})$ . La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in C^n([0; 1], \mathbb{R})$$

- Pour tout  $x \in [0; 1]$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $u'_n(x) = \lambda u_{n-1}(x)$ , donc  $u''_n(x) = \lambda u'_{n-1}(x)$ . Or  $u'_{n-1}(x) = \lambda u_{n-2}(x)$ , donc  $u''_n(x) = \lambda^2 u_{n-2}(x)$ .

Cela suggère de montrer que :  $\forall k \in [0, n]$ ,  $u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$ .

Procédons à nouveau par récurrence.

Cette propriété est vraie pour  $k = 0, 1$ . Cela suffit...

Supposons que pour un entier  $k \in [0, n-1]$ ,  $u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$ .

Dérivons cette égalité :

$u_n^{(k+1)} = (u_n^{(k)})' = \lambda^k u'_{n-k} = \lambda^k \lambda u_{n-k-1}$  d'après la définition de la suite  $(u_n)$ . Donc  $u_n^{(k+1)} = \lambda^{k+1} u_{n-(k+1)}$ . La propriété est héréditaire donc

$$\boxed{\forall k \in [0, n], u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}}$$

Remarquons que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_k(0) = 0$ , donc  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k / 0 \leq k \leq n-1, u_n^{(k)}(0) = 0}$

Pour tout  $n \geq 1$  et tout entier  $k \in [0, n-1]$ ,  $u_n^{(k)}(0) = \lambda^k u_{n-k}(0) = 0$  puisque  $n-k \geq 1$ .

L'application  $u_{n+1}$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $[0; 1]$ . On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre  $n$ .

$$\forall x \in [0; 1], u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} u_{n+1}^{(k)}(0) + \int_0^x u_{n+1}^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

$u_{n+1}^{(k)}(0) = 0$  car  $k \leq n$  ;  $u_{n+1}^{(n+1)}(t) = \lambda^{n+1} u_0(t) = \lambda^{n+1} f(t)$ . Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1], u_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t) dt}$$

2-a) \_\_\_\_\_

$$\text{Pour } n \geq 1, \forall x \in [0; 1], u_n(x) = \lambda^n \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Puisque  $0 \leq x$ , on a l'inégalité suivante :  $|u_n(x)| \leq \frac{|\lambda^n|}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} |f(t)| dt.$

En effet, sur  $[0; x]$ ,  $x-t \geq 0$ , donc  $|(x-t)^{n-1}| = (x-t)^{n-1}$ .

La fonction  $|f|$  est continue sur  $[0; 1]$ , donc elle y est majorée.