SERIES ; INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXXI

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ à valeurs réelles et λ un réel donné. On définit une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$, définies sur l'intervalle $[0;1]$, par :

$$\text{Pour tout } x\in[0;1] \quad \begin{cases} u_0(x) & = f(x) \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}(x) & = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n\geq 0$, u_n est de classe C^n sur $[0,1]$ et donner, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, les différentes dérivées $u_n^{(k)}$ de u_n. En déduire

$$u_{n+1}(x)=\int_0^x \lambda^{n+1}\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)dt$$

2–a) Montrer que pour tout $x\in[0;1]$, la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

b) Soit u un réel. Montrer qu'il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N_0$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|u|^k}{k!}\leq\frac{2|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k(x)$ à l'aide d'une intégrale.

d) Soit $t\in[0;x]$ et $x\in[0;1]$.

En écrivant $e^{\lambda(x-t)}$ sous forme d'une série, exprimer $U(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ en fonction de $f(x)$, e^x et $\displaystyle\int_0^x e^{-\lambda t}f(t)dt$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXXI

1)

- Procédons par récurrence.

Pour $n=0$, la fonction u_0 vaut f, donc $u_0 \in C^0([0;1],\mathbb{R})$ par hypothèse.

Supposons que pour un entier n donné, $u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$.

$\forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda u_n(t)dt$. Donc $\forall x \in [0;1],\ u'_{n+1}(x) = \lambda u_n(x)$.

Ce qui s'écrit : $u'_{n+1} = \lambda u_n$.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$, donc u'_{n+1} aussi et par suite $u_{n+1} \in C^{n+1}([0;1],\mathbb{R})$. La propriété est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in C^n([0;1],\mathbb{R})$$

- Pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \geq 1,\ u'_n(x) = \lambda u_{n-1}(x)$, donc $u''_n(x) = \lambda u'_{n-1}(x)$. Or $u'_{n-1}(x) = \lambda u_{n-2}(x)$, donc $u''_n(x) = \lambda^2 u_{n-2}(x)$.

Cela suggère de montrer que : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$.

Procédons à nouveau par récurrence.

Cette propriété est vraie pour $k = 0, 1$. Cela suffit...

Supposons que pour un entier $k \in [\![0, n-1]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}$.

Dérivons cette égalité :

$u_n^{(k+1)} = (u_n^{(k)})' = \lambda^k u'_{n-k} = \lambda^k \lambda u_{n-k-1}$ d'après la définition de la suite (u_n). Donc $u_n^{(k+1)} = \lambda^{k+1} u_{n-(k+1)}$. La propriété est héréditaire donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_n^{(k)} = \lambda^k u_{n-k}}$$

Remarquons que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k(0) = 0$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k\ /\ 0 \leq k \leq n-1,\ u_n^{(k)}(0) = 0}$

Pour tout $n \geq 1$ et tout entier $k \in [\![0, n-1]\!],\ u_n^{(k)}(0) = \lambda^k u_{n-k}(0) = 0$ puisque $n - k \geq 1$.

L'application u_{n+1} est de classe C^{n+1} sur $[0;1]$. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

$$\forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} u_{n+1}^{(k)}(0) + \int_0^x u_{n+1}^{(n+1)} t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

$u_{n+1}^{(k)}(0) = 0$ car $k \leq n$; $u_{n+1}^{(n+1)} t = \lambda^{n+1} u_0(t) = \lambda^{n+1} f(t)$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1],\ u_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt}$$

2–a)

Pour $n \geq 1,\ \forall x \in [0;1],\ u_n(x) = \lambda^n \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$.

Puisque $0 \leq x$, on a l'inégalité suivante : $|u_n(x)| \leq \dfrac{|\lambda^n|}{(n-1)!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1} |f(t)| dt$.

En effet, sur $[0;x],\ x - t \geq 0$, donc $|(x-t)^{n-1}| = (x-t)^{n-1}$.

La fonction $|f|$ est continue sur $[0;1]$, donc elle y est majorée.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.