



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE : INTEGRATION

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXX

On définit la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  de fonctions réelles par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$$

1-a) Montrer que pour tout  $x$  réel et tout  $n$  entier naturel  $n : |I_n(x)| \leq 1$ .

b) Calculer  $I_0(x)$  et  $I_1(x)$ . Etudier la continuité de  $I_0$  et  $I_1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2-a) Soit  $h \in \mathbb{R}$  ; montrer que pour tout  $x$  réel et tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|I_n(x+h) - I_n(x)| \leq \frac{h^2}{2}.$$

b) En déduire que la fonction  $I_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3-a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, donner pour tous réels  $x, h$  et  $t$  une majoration de

$$|\cos(tx+th) - \cos(tx) - th \sin(tx)|$$

b) Pour tout réel  $x$  on pose :  $J_n(x) = - \int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(tx) dt$ .

Montrer que la fonction  $I_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et exprimer sa dérivée  $I'_n$  en fonction de  $J_n$ .

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXX

1-a)

$\forall t \in [0; 1], 0 \leq 1 - t^2 \leq 1$  et  $|\cos(tx)| \leq 1$ , donc  $|(1 - t^2)^n \cos(tx)| \leq 1$  (1).

Par conséquent,

$$\left| \int_0^1 (1 - t^2)^n \cos(tx) dt \right| \leq \int_0^1 |(1 - t^2)^n \cos(tx)| dt \quad (\text{bornes dans l'ordre croissant})$$

on intègre l'inégalité (1) ; les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\left| \int_0^1 (1 - t^2)^n \cos(tx) dt \right| \leq \int_0^1 |(1 - t^2)^n \cos(tx)| dt \leq \int_0^1 dt$$

$|I_n(x)| \leq 1$

1-b)

### Le calcul

- $I_0(x) = \int_0^1 \cos(tx) dx.$

Si  $x = 0$ ,  $I_0(0) = 1$ .

Si  $x \neq 0$ ,  $I_0(x) = \left[ \frac{\sin(tx)}{x} \right]_0^1 = \frac{\sin x}{x}$

- $I_1(x) = \int_0^1 (1 - t^2) \cos(tx) dt.$

Si  $x = 0$ ,  $I_1(0) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Si  $x \neq 0$ , intégrons par parties.

$u(t) = 1 - t^2 \implies u'(t) = -2t$  ;  $v'(t) = \cos(tx) \iff v(t) = \frac{\sin(tx)}{x}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont  $C^1$  sur  $[0; 1]$ , donc

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \left[ (1 - t^2) \frac{\sin(tx)}{x} \right]_0^1 + \frac{2}{x} \int_0^1 t \sin(tx) dt \\ &= \frac{2}{x} \int_0^1 t \sin(tx) dt \end{aligned}$$

Posons  $J(x) = \int_0^1 t \sin(tx) dt$  et intégrons par parties.

$w(t) = t \implies w'(t) = 1$  ;  $z'(t) = \sin(tx) \iff z(t) = -\frac{\cos(tx)}{x}$  ; les fonctions  $w$  et  $z$  sont  $C^1$  sur  $[0; 1]$ .

$$\begin{aligned} J(x) &= -\left[ \frac{t \cos(tx)}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(tx) dt \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} \left[ \sin(tx) \right]_0^1 \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$I_1(x) = \frac{2}{x} \left( -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{2 \sin x - 2x \cos x}{x^3}$