



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ANALYSE : INTEGRATION

ENONCE DE L'EXERCICE-XXX

On définit la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ de fonctions réelles par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$$

- 1-a) Montrer que pour tout x réel et tout n entier naturel $n : |I_n(x)| \leq 1$.
b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$. Etudier la continuité de I_0 et I_1 sur \mathbb{R} .
2-a) Soit $h \in \mathbb{R}$; montrer que pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|I_n(x+h) - I_n(x)| \leq \frac{h^2}{2}.$$

- b) En déduire que la fonction I_n est continue sur \mathbb{R} .

3-a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, donner pour tous réels x, h et t une majoration de

$$|\cos(tx+th) - \cos(tx) - th \sin(tx)|$$

- b) Pour tout réel x on pose : $J_n(x) = - \int_0^1 t(1-t^2)^n \sin(tx) dt$.

Montrer que la fonction I_n est dérivable sur \mathbb{R} et exprimer sa dérivée I'_n en fonction de J_n .

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXX

1-a)

$\forall t \in [0; 1], 0 \leq 1 - t^2 \leq 1$ et $|\cos(tx)| \leq 1$, donc $|(1 - t^2)^n \cos(tx)| \leq 1$ (1).

Par conséquent,

$$\left| \int_0^1 (1 - t^2)^n \cos(tx) dt \right| \leq \int_0^1 |(1 - t^2)^n \cos(tx)| dt \quad (\text{bornes dans l'ordre croissant})$$

on intègre l'inégalité (1) ; les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\left| \int_0^1 (1 - t^2)^n \cos(tx) dt \right| \leq \int_0^1 |(1 - t^2)^n \cos(tx)| dt \leq \int_0^1 dt$$

$$\boxed{|I_n(x)| \leq 1}$$

1-b)

Le calcul

- $I_0(x) = \int_0^1 \cos(tx) dx.$

Si $x = 0$, $I_0(0) = 1$.

Si $x \neq 0$, $I_0(x) = \left[\frac{\sin(tx)}{x} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\sin x}{x}}$

- $I_1(x) = \int_0^1 (1 - t^2) \cos(tx) dt.$

Si $x = 0$, $I_1(0) = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Si $x \neq 0$, intégrons par parties.

$u(t) = 1 - t^2 \implies u'(t) = -2t$; $v'(t) = \cos(tx) \iff v(t) = \frac{\sin(tx)}{x}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0; 1]$, donc

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \left[(1 - t^2) \frac{\sin(tx)}{x} \right]_0^1 + \frac{2}{x} \int_0^1 t \sin(tx) dt \\ &= \frac{2}{x} \int_0^1 t \sin(tx) dt \end{aligned}$$

Posons $J(x) = \int_0^1 t \sin(tx) dt$ et intégrons par parties.

$w(t) = t \implies w'(t) = 1$; $z'(t) = \sin(tx) \iff z(t) = -\frac{\cos(tx)}{x}$; les fonctions w et z sont C^1 sur $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} J(x) &= -\left[\frac{t \cos(tx)}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \cos(tx) dt \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2} \left[\sin(tx) \right]_0^1 \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{I_1(x) = \frac{2}{x} \left(-\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{2 \sin x - 2x \cos x}{x^3}}$$