ANALYSE : INTEGRATION

ENONCE DE L'EXERCICE–XXX

On définit la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ de fonctions réelles par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)dt$$

1–a) Montrer que pour tout x réel et tout n entier naturel n : $|I_n(x)| \leq 1$.

b) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$. Etudier la continuité de I_0 et I_1 sur $\mathbb{R}$.

2–a) Soit $h \in \mathbb{R}$; montrer que pour tout x réel et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Big| I_n(x+h) - I_n(x) \Big| \leq \frac{h^2}{2}.$$

b) En déduire que la fonction I_n est continue sur $\mathbb{R}$.

3–a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, donner pour tous réels x, h et t une majoraton de

$$|\cos(tx+th) - \cos(tx) - th \sin\ (tx)|$$

b) Pour tout réel x on pose : $J_n(x) = -\displaystyle\int_0^1 t(1-t^2)^n \sin\ (tx)dt$.

Montrer que la fonction I_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée I'_n en fonction de J_n.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXX

1–a)

$\forall t \in [0;1],\ 0 \leq 1-t^2 \leq 1$ et $|\cos(tx)| \leq 1$, donc $|(1-t^2)^n \cos(tx)| \leq 1 \quad (1)$.

Par conséquent,

$$\left|\int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)dt\right| \leq \int_0^1 |(1-t^2)^n \cos(tx)|dt \quad (\text{ bornes dans l'ordre croissant})$$

on intégre l'inégalité (1) ; les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\left|\int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx)dt\right| \leq \int_0^1 |(1-t^2)^n \cos(tx)|dt \leq \int_0^1 dt$$

$$\boxed{|I_n(x)| \leq 1}$$

1–b)

Le calcul

- $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(tx)dx$.

Si $x = 0,\ I_0(0) = 1$.

Si $x \neq 0,\ I_0(x) = \left[\dfrac{\sin\ (tx)}{x}\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{\sin\ x}{x}}$

- $I_1(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\cos(tx)dt$.

Si $x = 0,\ I_1(0) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Si $x \neq 0$, intégrons par parties.

$u(t) = 1-t^2 \Longrightarrow u'(t) = -2t$; $v'(t) = \cos(tx) \Longleftarrow v(t) = \dfrac{\sin\ (tx)}{x}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $[0;1]$, donc

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \left[(1-t^2)\frac{\sin\ (tx)}{x}\right]_0^1 + \frac{2}{x}\int_0^1 t\sin\ (tx)dt \\ &= \frac{2}{x}\int_0^1 t\sin\ (tx)dt \end{aligned}$$

Posons $J(x) = \displaystyle\int_0^1 t\sin\ (tx)dt$ et intégrons par parties.

$w(t) = t \Longrightarrow w'(t) = 1$; $z'(t) = \sin\ (tx) \Longleftarrow z(t) = -\dfrac{\cos(tx)}{x}$; les fonctions w et z sont C^1 sur $[0;1]$.

$$\begin{aligned} J(x) &= -\left[\frac{t\cos(tx)}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(tx)dt \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x^2}\Big[\sin\ (tx)\Big]_0^1 \\ &= -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin\ x}{x^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\boxed{I_1(x) = \frac{2}{x}\left(-\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin\ x}{x^2}\right) = \frac{2\sin\ x - 2x\cos x}{x^3}}$$