Code épreuve : 289

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2013

Conception : H.E.C.

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 30 avril 2013, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

---

EXERCICE

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

1.a) Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

e) Préciser le noyau $\mathrm{Ker} f$ de f ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker} f$.

f) Déterminer l'image $\mathrm{Im} f$ de f.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \mathrm{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \mathrm{Ker}(u^3)$. Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.

d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

PROBLÈME

- *Le problème aborde d'une part, l'analyse mathématique de l'évolution du prix de vente d'un bien sous différents modes d'anticipation d'agents économiques et d'autre part, la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction de profit d'une entreprise.*
- *On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*
- *Les quatre parties du problème sont très largement indépendantes. Les questions 10 et 11 font appel aux résultats de la partie III.*

Partie I. Prix d'équilibre

Sur le marché d'un certain bien, on note D la fonction de demande globale (des consommateurs), O la fonction d'offre globale (des entreprises) et p le prix de vente du bien.
On suppose habituellement que la fonction $D : p \mapsto D(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est décroissante et que la fonction $O : p \mapsto O(p)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles est croissante.

Si l'équation $O(p) = D(p)$ admet une solution p^*, on dit que p^* *est un prix d'équilibre du marché.*

Avant d'atteindre un niveau d'équilibre, le prix p peut être soumis à des fluctuations provoquées par des excès d'offre $\big(O(p) > D(p)\big)$ ou des excès de demande $\big(D(p) > O(p)\big)$ au cours du temps.

Afin de rendre compte de cette évolution, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n la valeur du prix à l'instant n.
On suppose que la demande dépend de la valeur du prix selon la relation $D_n = D(p_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Quant aux entreprises, elles adaptent à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, la quantité offerte O_n à l'instant n à un *prix anticipé à l'instant $(n-1)$, noté $\widehat{p}_n$*, selon la relation $O_n = O(\widehat{p}_n)$, où $\widehat{p}_0$ peut être interprété comme un prix d'étude de marché.
On suppose qu'à chaque instant, l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n = D_n$.

Dans toute cette partie, on considère quatre paramètres réels strictement positifs a, b, c et d, avec $a > d$, et on suppose que les fonctions D et O sont définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $D(p) = a - b\,p$ et $O(p) = c\,p + d$.
Par suite, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(p_n) = a - b\,p_n$ et $O(\widehat{p}_n) = c\,\widehat{p}_n + d$.

1. Dans cette question *uniquement*, les réels a, b, c et d ont les valeurs suivantes : $a = 40$, $b = 8$, $c = 2$ et $d = 20$.
   On suppose que p_0 et p_1 sont donnés et que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\widehat{p}_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$.
   a) Établir l'existence et l'unicité d'un prix d'équilibre p^*. Calculer p^*.
   b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $p_n = -\dfrac{1}{2}\,p_{n-1} + \dfrac{1}{4}\,p_{n-2} + \dfrac{5}{2}$.
   c) Écrire une fonction Pascal récursive, d'en-tête `function p (p0,p1 : real ; n : integer) : real ;` qui renvoie, pour p_0, p_1 et n fixés, le terme p_n.
   d) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = p_n - p^*$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   e) Calculer les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   f) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n en fonction de n, r_1, r_2, p_0, p_1 et p^*.
   g) Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ? Interpréter.

2. Soit β un paramètre réel vérifiant $0 < \beta \leqslant 1$. On suppose que le prix p_0 est donné et que les anticipations de prix sont *adaptatives*, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\widehat{p}_n = \widehat{p}_{n-1} + \beta(p_{n-1} - \widehat{p}_{n-1})$.
   a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le prix courant p_n en fonction du prix anticipé $\widehat{p}_n$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le prix p_n vérifie l'équation de récurrence suivante :
   $$p_n = \left(1 - \beta\,\frac{b+c}{b}\right) p_{n-1} + \beta\,\frac{a-d}{b}\,.$$
   c) Quel est le prix d'équilibre p^* ? Déterminer l'expression de p_n en fonction de n, p_0, p^*, b, c et β.

d) En supposant que $p_0 \neq p^*$, montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si : $\dfrac{c}{b} < \dfrac{2}{\beta} - 1$. Quelle est alors sa limite ?

e) Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $c < b$.

Partie II. Convexité du profit et prix aléatoire

3. Soit p un paramètre réel positif ou nul et h_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$h_p(x) = p\,x - \frac{x^3}{3}\,.$$

a) Dresser le tableau de variation de h_p sur $\mathbb{R}_+$. Préciser les limites aux bornes de l'intervalle de définition, les racines de l'équation $h_p(x) = 0$ et la valeur maximale de h_p sur $\mathbb{R}_+$.

b) Tracer la courbe représentative de h_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On considère une entreprise présente sur le marché d'un bien qui adapte son volume de production $x \in \mathbb{R}_+$ à un niveau de prix $p \in \mathbb{R}_+$ donné (par l'équilibre du marché) ou administré (par l'État).

On modélise *le coût total de l'entreprise* par une fonction F définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que sa dérivée F', telle que $F(0) = F'(0) = 0$ et $F(x)$ équivalent à $s\,x^r$ avec $s > 0$ et $r > 1$, lorsque x tend vers $+\infty$. On note F'' la dérivée seconde de F et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F''(x) > 0$.

Soit Π_p la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $\Pi_p(x) = px - F(x)$.

4.a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F'(x) = +\infty$ et que F' admet sur $\mathbb{R}_+$ une fonction réciproque, que l'on note S, dont on précisera l'ensemble de définition (*la fonction S est la fonction d'offre de l'entreprise*).

b) Montrer que Π_p est concave sur $\mathbb{R}_+$ et admet sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en un seul point.

5. Soit M la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles telle que : $M(p) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \Pi_p(x)$ (*la fonction M est la fonction de profit de l'entreprise*).

a) Pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, exprimer $M(p)$ à l'aide de p, F et S.

b) Montrer que la fonction M est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée M'.

c) Montrer que la fonction M est convexe et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

6. On suppose que le prix p est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans l'ensemble $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on a : $M(p^{(i)}) - M(y) \geqslant M'(y)(p^{(i)} - y)$.

b) En déduire pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité : $E\big(M(p)\big) \geqslant M(y) + M'(y)\big(E(p) - y\big)$.

c) Établir l'inégalité : $E\big(M(p)\big) \geqslant M\big(E(p)\big)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

7. On suppose que le prix p est une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} M(x) f(x)\,\mathrm{d}x$. Justifier que p admet une espérance et montrer que : $E\big(M(p)\big) \geqslant M\big(E(p)\big)$.

Partie III. Espérance conditionnelle

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots, x_q\} \subset \mathbb{R}$ et $\{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbb{R}$, respectivement ($q \geqslant 2$ et $r \geqslant 2$).
On suppose que pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on a : $P\big([X = x_i]\big) > 0$.
Soit φ la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ à valeurs réelles, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1, q]\!], \quad \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{r} y_j\, P_{[X=x_i]}\big([Y = y_j]\big)\,.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\varphi(x_i)$ est *l'espérance conditionnelle de Y sachant l'événement* $[X = x_i]$, notée également $E\big(Y|[X = x_i]\big)$. On définit alors une variable aléatoire Z sur Ω en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = E\big(Y|[X = X(\omega)]\big)$ et on note $Z = E(Y|X) = \varphi(X)$.

8.a) On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer la variable aléatoire $E(Y|X)$.

b) Quelle est la variable aléatoire $E(X|X)$?

c) On suppose que les réels $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_q)$ sont deux à deux distincts.

Déterminer pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $P\big([E(Y|X) = \varphi(x_i)]\big)$.

d) Montrer que $E\big(E(Y|X)\big) = E(Y)$ (on pourra appliquer le théorème du transfert).

e) Soit les réels λ, ρ et μ. Exprimer $E(\lambda Y + \rho X + \mu|X)$ en fonction de λ, ρ, μ, X et $E(Y|X)$.

Partie IV. Anticipation naïve et anticipation rationnelle

Dans cette partie, on suppose qu'à chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), le prix p_n d'un certain bien est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(k)}\} \subset \mathbb{R}_+$, où k est un entier fixé supérieur ou égal à 2. On suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de variables aléatoires de même loi, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a : $P\big([p_n = p^{(i)}]\big) > 0$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes finies indépendantes et de même loi, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(u_n) = 0$ et $V(u_n) = \sigma^2 > 0$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires u_n et p_{n-1} sont indépendantes.

Soit θ et p^* deux paramètres réels vérifiant $-1 < \theta < 1$ et $p^* \geqslant 0$.

On suppose que p_0 est de la forme $p_0 = \ell u_0 + m$, où ℓ et m sont des constantes réelles, et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $p_n = \theta p_{n-1} + (1-\theta)p^* + u_n$. (1)

9.a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(p_n)$ et $V(p_n)$. Déterminer les constantes ℓ et m en fonction de θ et p^*.

b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la covariance $\mathrm{Cov}(p_n, p_{n-1})$.

Que représente le paramètre θ pour le couple de variables aléatoires (p_n, p_{n-1}) ?

10. Déterminer la variable aléatoire $E(p_n|p_{n-1})$.

11. On rappelle que l'on note $\widehat{p}_n$ l'anticipation de p_n faite à l'instant $(n-1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $e_n = p_n - \widehat{p}_n$ (*erreur d'anticipation à l'instant* n).

a) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont *naïves*, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\widehat{p}_n = p_{n-1}$.

Déterminer $E(\widehat{p}_n|p_{n-1})$. Calculer $E(\widehat{p}_n)$, $V(\widehat{p}_n)$, $E(e_n)$ et $V(e_n)$.

b) On suppose dans cette question que les anticipations de prix sont *rationnelles*, ce qui se traduit dans le cadre du modèle (1) par : $\widehat{p}_n = E(p_n|p_{n-1})$.

Déterminer $E(\widehat{p}_n|p_{n-1})$. Calculer $E(\widehat{p}_n)$, $V(\widehat{p}_n)$, $E(e_n)$ et $V(e_n)$.

c) Comparer les deux types d'anticipation *naïve* et *rationnelle*.

IMPRIMERIE NATIONALE – 13 1224 – D'après documents fournis

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2013

HEC-ESCP-EM-lyon 2013 VOIE E

CORRIGE

EXERCICE

Remarque : nous utiliserons la notation P au lieu de $P(X)$, notation qui est plus conforme au programme.

1–a)

$$\boxed{\dim E = 4}$$

1–b)

Soit $(P,Q) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= -3X(\alpha P + Q) + X^2(\alpha P + Q)' \\ &= -3X(\alpha P) - 3XQ + X^2(\alpha P' + Q') \\ &\quad \text{grâce à la linéarité de la dérivation} \\ &= \alpha(-3XP + X^2P') + (-3XQ + X^2Q') \\ &= \alpha f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

f est linéaire

D'autre part, écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$;

$$\begin{aligned} f(P) &= -3X(aX^3 + bX^2 + cX + d) + X^2(3aX^2 + 2bX + c) \\ &= -3aX^4 - 3bX^3 - 3cX^2 - 3dX + 3aX^4 + 2bX^3 + cX^2 \\ &= -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \end{aligned}$$

Ceci prouve que $f(P) \in E$

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$$

1–c)

Utilisons le résultat précédent : $f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX$.

$P = 1$ correspond à $a = b = c = 0$ et $d = 1$; $f(1) = -3X$;

$P = X$ correspond à $a = b = d = 0$ et $c = 1$; $f(X) = -2X^2$;

$P = X^2$ correspond a $a = c = d = 0$ et $b = 1$; $f(X^2) = -X^3$;

$P = X^3$ correspond à $b = c = d = 0$ et $a = 1$: $f(X^3) = 0_E$ (polynôme nul de E)

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est : } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

1–d)

La matrice M est triangulaire inférieure ; ses valeurs propres sont ses termes diagonaux : $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } M, \text{ donc de } f}$

- 0 est valeur propre de M, donc $\boxed{\text{la matrice } M \text{ n'est pas inversible}}$

Remarque : on aurait pu dire ; $f(X^3) = 0_E$, donc le polynôme $P = X^3$ appartient au noyau de f. Par suite $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, f n'est pas injective, donc n'est pas bijective : ceci veut dire que M n'est pas inversible.

- Si M est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, sur la diagonale de laquelle il y a la valeur propre 0 ; M est semblable à la matrice nulle de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, inversible, telle que $M = P(0)P^{-1}$ où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$; on a alors $M = (0)$, ce qui est manifestement faux.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ (donc l'endomorphisme } f\text{) n'est pas diagonalisable}}$$

Un calcul sans difficulté donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $M^4 = (0)$.

$\forall n \geq 4,\ \exists p \in \mathbb{N}\ /\ n = 4 + p$; $M^n = M^{4+p} = M^4.M^p = (0)M^p = (0)$.

$$\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ \forall n \geq 4,\ \ M^n = (0)}$$

1–e)

Utilisons à nouveau le résultat : $f(aX^3 + bX^2 + cX + d) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX$.

$$\begin{aligned} P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \operatorname{Ker} f \quad & \iff -bX^3 - 2cX^2 - 3dX = 0_E \\ & \iff b = c = d = 0 \\ & \iff P = aX^3 \end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} f = \{P = aX^3\ /\ a \in \mathbb{R}\} = \operatorname{vect}(X^3)$. Le polynôme X^3 n'est pas nul, c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(X^3)\ ;\ \dim \operatorname{Ker} f = 1}$$

1–f)

D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3$.

D'après le cours, $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \operatorname{vect}(-3X, -2X^2, -X^3, 0_E) = \operatorname{vect}(-3X, -2X^2, -X^3)$. La famille $(-3X, -2X^2, -X^3)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, son cardinal vaut 3, qui est la dimension de $\operatorname{Im} f$, donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

On sait qu'on obtient une autre base en divisant chacun des vecteurs précédents par un réel non nul ; donc (X, X^2, X^3) est une base de $\operatorname{Im} f$.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(X, X^2, X^3)\ ;\ \dim \operatorname{Im} f = 3}$$

Remarque : on n'a pas besoin du théorème du rang pour donner une base de $\operatorname{Im} f$; en effet, les polynômes $-3X, -2X^2, -X^3$ sont de degrés deux à deux distincts (on dit aussi qu'ils sont échelonnés en degrés), ils forment donc une famille libre et par suite une base de $\operatorname{Im} f$.

Du même coup, le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} f = 1$; le polynôme X^3 appartient au noyau de f (voir la question 1–b), c'est un vecteur non nul d'un espace de dimension 1, il en forme donc une base.

Cela pour dire que l'interversion des questions e) et f) aurait permis des démonstrations plus élégantes et sans calculs.

2–a)

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ aP+bu(P)+cu^2(P)+du^3(P) = 0_E$ Prenons l'image des deux membres de cette égalité successivement par $u,\ u^2$ et u^3. Rappelons que $\forall n \geq 4,\ M^n = (0) \iff \forall n \geq 4,\ u^n = 0_E$ (endomorphisme nul de E).

On obtient le système suivant dans lequel on a utilisé la linéarité de $u,\ u^2$ et u^3.

$$\begin{cases} aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) & = 0_E \\ au(P) + bu^2(P) + cu^3(P) & = 0_E \\ au^2(P) + bu^3(P) & = 0_E \\ au^3(P) & = 0_E \end{cases}$$

La dernière égalité donne $a = 0$ puisque $u^3(P) \neq 0_E$; puis la troisième équation donne $b = 0$ pour la même raison, puis la deuxième donne $c = 0$ et finalement la première donne $a = 0$.

Finalement $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = 0_E \implies a = b = c = d = 0$: la famille $(P,\ u(P),\ u^2(P),\ u^3(P))$ est libre

$$\boxed{\begin{array}{l} (P,\ u(P),\ u^2(P),\ u^3(P)) \text{ est une famille libre de} \\ 4 \text{ vecteurs dans } E \text{ de dimension } 4 : \\ \quad (P,\ u(P),\ u^2(P),\ u^3(P)) \text{ est une base de } E \end{array}}$$

2–b)

$g = \mathrm{Id}_E + u + u^2 + u^3$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes de E, c'est un endomorphisme de E.

Considérons la base précédente de E et écrivons la matrice de u dans cette base. Notons U cette matrice ; on rappelle qu'elle se forme en mettant en colonne les coordonnées de $u(P),\ u(u(P)),\ u(u^2(P)),\ u(u^3(P))$ dans la base $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices de u^2 et u^3 dans cette base sont respectivement $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; il en résulte que la matrice G de g, dans cette base étant égale à $I_4 + U + U^2 + U^3$,

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matrice G est triangulaire inférieure, aucun terme diagonal n'est nul, donc

$$\boxed{G \text{ est inversible, donc } g \text{ est un automorphisme de } E}$$

- Détermination de g^{-1} ; pour cela déterminons de G^{-1}.

Soit $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Alors

$G.B = A \iff B = G^{-1}.A$ Résolvons donc le système représentatif de $G.B = A$, d'inconnue B.

$$G.B = A \iff \begin{cases} x & = a \\ x + y & = b \\ x + y + z & = c \\ x + y + z + t & = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = a \\ y & = b - a \\ z & = c - b \\ t & = d - c \end{cases}$$

Sous forme matricielle, ce résultat s'écrit : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\boxed{G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_4 - U \text{ ; donc } g^{-1} = \mathrm{Id}_E - u}$$

Remarque : une autre méthode utilisant le fait que les puissances de u commutent entre elles, avec l'identité et que $u^k = 0_E$ pour $k \geq 4$.

$g = \mathrm{Id}_E + u + u^2 + u^3$, donc $g \circ u = u + u^2 + u^3 + u^4 = u + u^2 + u^3 = g - Id_E$ grâce à la première égalité ; par suite $g \circ u = g - Id_E$, soit $\mathrm{Id}_E = g - g \circ u = g \circ (\mathrm{Id}_E - u)$.

Comme $g \circ (\mathrm{Id}_E - u) = (\mathrm{Id}_E - u) \circ g$, on conclut que $g^{-1} = \mathrm{Id}_E - u$.

Les étudiants savent peut-être que, g et $(\mathrm{Id}_E - u)$ étant des endomorphismes d'un espace **de dimension finie**, l'égalité $g \circ (\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Id}_E$ suffit pour prouver que g est bijectif et que $g^{-1} = \mathrm{Id}_E - u$.

La même idée présentée différemment ;

soit $Q \in E$, on cherche $T \in E \ / \ Q = g(T)$; on aura bien $T = g^{-1}(Q)$, d'où g^{-1}.

$g(T) = Q \iff T + u(T) + u^2(T) + u^3(T) = Q$; prenons l'image des deux termes par u ; il vient $u(T) + u^2(T) + u^3(T) = u(Q)$; par différence entre les deux égalités, on obtient

$T = Q - u(Q) = (\mathrm{Id}_E - u)(Q)$; d'où $g^{-1} = \mathrm{Id}_E - u$.

2–c)

- Soit $Q \in \operatorname{Ker} u$, alors $u(Q) = 0_E$, donc $u^2(Q) = u^3(Q) = 0_E$; $(g - \mathrm{Id}_E)(Q) = (u + u^2 + u^3)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0_E$. Conclusion : $Q \in \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$.

$$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$$

- Soit $Q \in \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$; on a $u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0_E$. **(*)**

Prenons l'image des deux membres de l'égalité par u^2 ; on a

$u^3(Q) + u^4(Q) + u^5(Q) = 0_E \iff u^3(Q) = 0_E$ car u^4 et u^5 sont des endomorphismes nuls.

L'égalité **(*)** devient : $u(Q) + u^2(Q) = 0_E$. **(**)**

Prenons l'image des deux termes par u, il vient $u^2(Q) + u^3(Q) = 0_E \iff u^2(Q) = 0_E$. L'égalité **(**)** devient $u(Q) = 0_E$, c'est-à-dire $Q \in \operatorname{Ker} u$.

$$\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Ker} u$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)}$$