BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril 2013 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0\,;1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t \ln t & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0\,;1]$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0\,;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.$$

Partie II - Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si } \ 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.
Est-ce que f est continue en 1 ?

2. Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

3. Montrer que f est une densité.

4. a. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0\,;1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0\,;1[$.

b. En déduire que l'équation $f'(t) = 0$, d'inconnue $t \in]0\,;1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1$.

c. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en oeuvre l'algorithme de dichotomie.

Partie III - Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie **II**) et on note F la fonction de répartition de X.

1. Calculer, pour tout $x \in]0\,;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
(On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **I.2.**)

2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de F.

Partie IV - Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0\,;+\infty[^2$ tels que : $x + y < 1$ et $2x < 1$.
On considère l'application $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert D, définie, pour tout $(x, y) \in D$, par :

$$G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}f(2x),$$

l'application f ayant été définie au début de la partie **II**.

1. Représenter l'ensemble D.

2. Calculer, pour tout $(x, y) \in D$, les dérivées partielles premières de G en (x, y), en fonction de x, y, f'.

3. Soit $(x, y) \in D$. Montrer que (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$f'(2x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x + y) = 0.$$

4. En déduire que G admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $\left(\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\alpha}{2}\right)$, le réel α ayant été défini en **II 4.b.**

5. Est-ce que G admet un extremum local ?

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Est-ce que A est diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$?

2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

3. En déduire une matrice diagonale $D \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.

On appelle commutant de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$AM = MA.$$
On appelle commutant de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$DN = ND.$$

4. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_4(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
$$M \in \mathrm{C}_A \iff N \in \mathrm{C}_D.$$

6. Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.

7. En déduire :
$$\mathrm{C}_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

8. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathrm{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_1 et la loi de la variable aléatoire Z_2.
En déduire $\mathrm{E}(Z_1)$ et $\mathrm{E}(Z_2)$.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.

b. Montrer, pour tout $\ell \in [\![1;n]\!]$: $\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)$.

c. En déduire : $\mathrm{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(Z_k) + 1$.

3. a. Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$, de terme général $v_k = \mathrm{E}(Z_k) - n$, est une suite géométrique.

b. En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathrm{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient quatre boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k \geqslant 5)$.

2. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

3. On note, pour tout i de $[\![1\,;4]\!]$, A_i l'événement :

« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\,\mathrm{P}(A_1) - 6\,\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b. Calculer $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

c. En déduire : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $\mathrm{P}(Z_k = 3)$ et $\mathrm{P}(Z_k = 4)$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2013

EM LYON 2013 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

Partie I : calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

1)

Sur l'intervalle $]0,1]$, la fonction g est continue en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle.

Par croissances comparées, $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0 à droite et par suite,

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue sur } [0,1]}$$

2)

Posons $u(t) = -\ln t \Longrightarrow u'(t) = -\frac{1}{t}$ et $v'(t) = t \Longleftarrow v(t) = \frac{t^2}{2}$; les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,1]$, l'intégration par parties est légitimée.

$$\forall x \in]0,1[, \quad \int_x^1 g(t)dt = \Big[-\frac{t^2}{2}\ln t\Big]_x^1 + \int_x^1 \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{2}\ln x + \Big[\frac{t^2}{4}\Big]_x^1$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1], \quad \int_x^1 g(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$$

3)

Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$, donc $\lim_{x\to 0^+} (\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

Par définition d'une intégrale convergente, $\boxed{\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{4}}$

Remarque : en fait, il ne s'agit pas de convergence d'intégrale puique la fonction g est continue sur $[0,1]$.

Partie II : exemple de densité

1)

Remarquons que, pour tout $t \in]0,1[$, $f(t) = g(t) + t^{\frac{1}{3}}$.

D'après la question I–1), la fonction f est continue sur $]0,1[$ en tant que somme de fonctions continues sur cet intervalle.

Sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, la fonction f est continue puisqu'elle y est nulle.

$\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-}(-t\ln t + t^{\frac{1}{3}}) = 1$. Or $f(1) = 0$, donc f n'est pas continue au point 1 car elle y est discontinue à gauche.

$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t\to 0^+}(-t\ln t + t^{\frac{1}{3}}) = 0$, par croissances comparées. De plus, $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = 0$ puisque f est nulle sur $]-\infty,0[$. Or $f(0) = 0$, conclusion : f est continue au point 0.

La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$, continue au point 0, continue sur $]0,1[$, donc f est continue sur $]-\infty,1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} - \{1\} \text{ et discontinue en 1 à gauche}}$$

2)

$*$ L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ converge et vaut 0 car f est nulle sur $]-\infty,0]$.

$*$ Sur $[1,+\infty[$, f est nulle, donc $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 0.

$*$ L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(t)dt$ est impropre en 1 uniquement, puisque f est continue sur $[0,1[$. On sait que $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 1$, d'après la question I–1), donc la restriction de f à l'intervalle $[0,1[$ est prolongeable par continuité en 1 et par suite

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 f(t)dt \text{ est faussement impropre donc convergente}}$$

$*$ Calcul de l'intégrale

$\forall t \in [0,1[$, $f(t) = g(t) + t^{\frac{1}{3}}$. De plus $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 1 = g(1) + 1^{\frac{1}{3}}$. Cela permet de dire que la restriction de f à $[0,1]$ est $t \mapsto g(t) + t^{\frac{1}{3}}$. Par linéarité des intégrales convergentes,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 t^{\frac{1}{3}}dt\\ &= \frac{1}{4} + \left[\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}\right]_0^1 \quad \text{(d'après la question I–3)}\\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)dt = 1}$$

3)

Finalement,

f est continue sur $\mathbb{R}$ privé du point 1,

l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = 1$ d'après les résultats précédents et d'après la relation de Chasles pour les intégrales convergentes,

f est nulle sur $]-\infty,0]\cup[1,+\infty]$ et positive sur $]0,1[$ puisque, sur cet intervalle $-t\ln t>0$, ainsi que $t^{\frac{1}{3}}$, donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$,

tout cela permet de conclure : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

4–a)

Sur l'intervalle $]0,1[$, la fonction f est de classe C^2 en tant que somme de fonctions de classe C^2 sur cet intervalle.

$$\forall t \in]0,1[,\ f'(t) = -\ln t - 1 + \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(t) = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9}t^{-\frac{5}{3}} < 0$$

Remarque : ce résultat est en fait valable sur $]0,1]$.

4–b)

La fonction f' est strictement décroissante sur $]0,1]$. D'où le tableau de variations :

t	0		1
f'	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$

Explication des bornes :

$f'(1) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

$$f'(t) = -\ln t - 1 + \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0^+} -\ln t = +\infty$, par ailleurs, $\lim\limits_{t\to 0^+} 3t^{\frac{2}{3}} = 0^+$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ et par suite $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = +\infty$.

- La fonction f' est continue, strictement décroissante sur $]0,1]$, donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[-\frac{2}{3},+\infty[$ d'après le tableau de variations.

Or $0 \in [-\frac{2}{3},+\infty[$, donc $\exists!\alpha \in]0,1]\ /\ f'(\alpha)=0$; remarquons que $\alpha<1$ puisque $f'(1)<0=f'(\alpha)$.

$$\boxed{\exists!\alpha \in]0,1[\ /\ f'(\alpha)=0}$$

- $f'(\frac{1}{e}) = -\ln(\frac{1}{e}) - 1 + \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}} = 1 - 1 + \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}} > 0.$

$f'(\frac{1}{e}) > 0 = f'(\alpha)$ et f' strictement décroissante sur $]0,1[$ implique $\frac{1}{e} < \alpha$.

$$\boxed{\exists!\alpha \in]\tfrac{1}{e},1[\ /\ f'(\alpha)=0}$$

4–c)

```
PROGRAM EMLYON2013 ;
var a,b,c : real ;

function f(x : real) : real ;
var y : real ;
begin y := -x*ln(x)+exp((ln(x))/3) ;
f := y ;
end ;
```

```
BEGIN
a := 1/exp(1) ; b := 1 ; c :=(a+b)/2 ;
while (b-a > 0.001) do begin
        if f(c) >0 then a := c else b := c ;
        c :=(a+b)/2 ;
    end ;
write('alpha =',c) ;
END.
```

Partie III : calcul d'une fonction de répartition

1)

En reprenant le calcul de la question II–2), il vient

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ \int_x^1 f(t)dt &= \int_x^1 g(t)dt + \int_x^1 t^{\frac{1}{3}}dt \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left[t^{\frac{4}{3}}\right]_x^1 \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - x^{\frac{4}{3}})\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \int_x^1 f(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + 1 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}}$$

2)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

- Si $x \leq 0$, alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 0]$, donc f est nulle sur l'intervalle d'intégration $]-\infty, x]$ et par conséquent :

$$\forall x \geq 0,\ F(x) = 0.$$

- Si $x \geq 1$, alors f est nulle sur $[1, x]$, donc $\displaystyle\int_1^x f(t)dt = 0$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \\ &\quad \text{(relation de Chasles pour les intégrales convergentes)} \\ &= 0 + 1 + 0 \quad \text{d'après la question II–2)}\end{aligned}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[,\ F(x) = 1$$

- Si $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \\ &\quad \text{(relation de Chasles pour les intégrales convergentes)} \\ &= 1 - \int_x^1 f(t)dt = 1 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + 1 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right) \quad \text{(d'après la question III–1)}\end{aligned}$$

$$\forall x \in]0,1[,\ F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$$

$$\boxed{\text{En résumé, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}}$$