BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve : 298

Conception : EDHEC

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\,2}+1}{2}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n < 1$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 1 - u_n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

c) En déduire que $u_n \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3) a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête function $u(n : \text{integer}) : \text{real}$; qui renvoie la valeur de u_n.

b) En déduire un programme, rédigé en Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $1-u_n < 10^{-3}$.

Exercice 2

1) Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable (on rappelle que $f^2 = f \circ f$).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2) a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g - Id)$.

c) Déterminer $\text{Ker}(g + Id)$.

d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\text{Ker}(g^2 + Id)$.

b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile".
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1) Loi de T_n.

a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.

b) Déterminer $P(T_n = n)$.

c) Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2) Loi de X_n.

a) Donner la loi de X_n.

b) Vérifier que $E(X_n)=1-q^n$.

3) Loi de Y_n.

a) Déterminer, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n=k)$.

b) Déterminer $P(Y_n=n)$.

c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $E(Y_n)$.

4) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

5) Simulation informatique.

Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n à l'exécution de l'instruction " Writeln (t, x, y) ; ".

```
Program EDHEC_2012 ;
   Var  n, t, x, y : integer ;
        p : real ;
Begin
   Randomize ; t : = 0 ; x : = 0 ; y : = 0 ;
   Readln(n) ;
   While (x = 0) and (t < n) do   begin ------ ;
                                      If random > p  then  ------
                                                     else  ------ ;
                                  end ;
Writeln (t, x, y) ;
End.
```

Problème

On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\lambda|x|e^{-\lambda x^2}$$

1) a) Montrer que f est paire.

b) Établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2) a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx$.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

3) a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge et donner sa valeur.

b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.

4) On pose $Y=X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.

5) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $W = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que W est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

b) En déduire une fonction Pascal dont l'en-tête est

function vax(lambda: real) : real ;

qui simule la loi de $|X|$.

c) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.
En déduire une fonction Pascal, utilisant random(2), dont l'en-tête est

function x(lambda : real) : real ;

qui simule la loi de X.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ de la loi de Y. Les variables $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ sont supposées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6) On considère des réels $x_1, ..., x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln\left(L(\lambda)\right)$ en fonction de λ, $x_1, ..., x_n$.

b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel λ de $]0, +\infty[$, par :

$$\varphi(\lambda) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

7) On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2 : $Z_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$.

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) En remarquant que $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que :

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda$$

b) Déterminer un estimateur Z_n', fonction simple de Z_n, qui soit un estimateur sans biais de λ.

ANNALES DE MATHEMATIQUES

EDHEC 2012 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE I

1–a)

Faisons un raisonnement par récurrence : notons P_n la propriété $0 \leq u_n < 1$.

$u_0 = 0$, donc on a $0 \leq u_0 < 1$.

Hérédité. Supposons la propriété P_n satisfaite pour un entier naturel n donné.

$0 \leq u_n < 1 \Longrightarrow 0 \leq u_n^2 < 1$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $1 \leq 1 + u_n^2 < 2$ et par suite, en divisant par $2 > 0$, on obtient $\frac{1}{2} \leq \frac{1+u_n^2}{2} < 1$, soit $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1[$.

Or $[\frac{1}{2}, 1[\subset [0, 1[$, donc on a bien $0 \leq u_{n+1} < 1$.

La propriété est héréditaire et valable pour tout entier naturel n d'après le principe du raisonnement par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1[\text{ : L'intervalle } [0,1[\text{ est un intervalle stable pour la suite } (u_n)}$$

Remarque : on on aurait pu procéder autrement pour l'hérédité. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1+x^2}{2}\cdot$ On a $u_{n+1} = f(u_n)$.

$f'(x) = x \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0 uniquement. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[0,1[$. Par conséquent, $\forall x \in [0,1[,\ f(x) \in [f(0), f(1)[= [\frac{1}{2}, 1[\subset [0,1[$.

$u_n \in [0,1[\Longrightarrow f(u_n) = u_{n+1} \in [0,1[$.

1–b)

Utilisons la fonction f. Elle est strictement croissante sur $[0,1[$, par conséquent la suite (u_n) est strictement monotone. Sa variation est donnée par la comparaison de u_0 et u_1.

$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} > 0 = u_0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement croissante}}$$

1–c)

La suite (u_n) est croissante, majorée par 1. D'après le théorème des suites monotones bornées,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; il s'ensuit que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) \quad &\Longleftrightarrow \ell = \frac{1+\ell^2}{2} \Longleftrightarrow 2\ell = 1 + \ell^2 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \ell^2 - 2\ell = 0 \Longleftrightarrow (1-\ell)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 1}$$

2–a)

Remarquons que la suite $(\frac{1}{v_n})$ est définie puisque $u_n \neq 1 \Longrightarrow v_n = 1 - u_n \neq 0$.

$$\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{u_{n+1}-u_n}{(1-u_{n+1})(1-u_n)}$$

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1+u_n^2}{2} = \frac{2-u_n^2-1}{2}$$

$$= \frac{1-u_n^2}{2} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{(1-u_n^2)}{2} \quad \text{calcul fait en 1–c)}$$

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{(1-u_{n+1})(1-u_n)} = \frac{\dfrac{(1-u_n)^2}{2}}{(1-u_n)\dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{2}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1-u_n)^2}{2}}{\dfrac{(1-u_n)^2(1+u_n)}{2}}$$

$$= \frac{1}{1+u_n}$$

$$\boxed{\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1+u_n}\ ;\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}) = \frac{1}{2}}$$

2–b)

D'après la propriété admise en début d'exercice, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}) = \frac{1}{2}$.

Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{v_n} - 1)$ ("téléscopage additif"). On en conclut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{v_n} - 1) = \frac{1}{2}$.

D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(\frac{1}{v_n} - 1) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}\frac{1}{v_n} - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nv_n}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$ et puisque $\frac{1}{2} \neq 0$, $\displaystyle\frac{1}{nv_n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $nv_n \underset{(+\infty)}{\sim} 2$.

$$\boxed{nv_n \underset{(+\infty)}{\sim} 2,\ \text{donc}\ v_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}}$$

$$v_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{\frac{2}{n}} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{v_n}{\frac{2}{n}} - 1\right) = 0.$$

Posons $\varepsilon_n = \dfrac{v_n}{\frac{2}{n}} - 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$ et $\dfrac{v_n}{\frac{2}{n}} = 1 + \varepsilon_n \Longleftrightarrow v_n = \dfrac{2}{n}(1+\varepsilon_n)$.

Donc $1 - u_n = \frac{2}{n}(1+\varepsilon_n) \Longleftrightarrow u_n = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n}\varepsilon_n$

$$\boxed{u_n = 1 - \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})}$$

3–a)

```
function u( n : integer) : real ;
var y : real ; k : integer ;
Begin y := 0 ;     for k :=1 to n do y := (sqrt(y)+1)/2 ;
      u := y ;
End ;
```

3–b)

```
PROGRAM EDHEC 2012 ;
var n : integer ;
BEGIN
n := 0 ;
while (1-u(n)>= 0.001) do n := n+1 ;
write (' n = ' , n) ;
END.
```

EXERCICE II

1)

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si matrice $A = \text{Mat}_{B_c}(f)$ est diagonalisable. Ce qui équivaut à

$\exists\, P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), P$ inversible, $\exists\, D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.

$D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AI_3AP = P^{-1}A^2P$ et puisque D^2 est une matrice diagonale on conclut

$$\boxed{f \text{ diagonalisable implique } f^2 \text{ diagonalisable}}$$

2–a)

Un calcul sans dificultés donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

L'égalité $A^4 - I = (0)$ indique que le polynôme $P = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A. D'après le cours on sait que l'ensemble des valeurs propres de A est inclus dans l'ensemble des racines réelles de ce polynôme (cet ensemble de valeurs propres peut être vide ; on dit aussi que les racines de P sont les valeur propres éventuelles de A).

$P(x) = 0 \iff x^4 - 1 = 0 \iff (x^2-1)(x^2+1) = 0 \iff (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0.$

Les racines réelles de P sont 1 et -1

$$\boxed{\text{spect}(A) \subset \{-1, 1\} \iff \text{spect}(g) \subset \{-1, 1\}}$$

2–b)

- Détermination de Ker$(g - \text{Id})$.

$\text{Mat}_{B_c}(g - I_d) = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; $u \in \text{Ker}(g - \text{Id}) \iff (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$. Cette égalité équivaut successivement aux systèmes :

$$\begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ 2x - 6y + 4z &= 0 \\ 3x - 8y + 5z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ 3x - 8y + 5z &= 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \\ -2y + 2z &= 0 & L_3 = 2L_2, \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\iff \begin{cases} x &= z \\ y &= z \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$$