



Code épreuve : 298

**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

Conception : EDHEC

**ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD****Concours d'admission sur classes préparatoires****MATHÉMATIQUES**

Option économique

**Lundi 7 mai 2012 de 8h à 12h**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

**Exercice 1**

On admet que, si une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $\ell$ , alors on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$ .

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et par la relation, valable

pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ .

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $0 \leq u_n < 1$ .

b) Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ .

c) Dédire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

2) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $v_n = 1 - u_n$ .

a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$ .

b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de  $v_n$  lorsque  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

c) En déduire que  $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

- 3) a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête fonction  $u(n : \text{integer}) : \text{real}$  ; qui renvoie la valeur de  $u_n$ .  
 b) En déduire un programme, rédigé en Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle on a :  $1 - u_n < 10^{-3}$ .

## Exercice 2

- 1) Montrer que, si  $f$  désigne un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  diagonalisable, alors l'endomorphisme  $f^2$  est aussi diagonalisable (on rappelle que  $f^2 = f \circ f$ ).

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fautive. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

- 2) a) Déterminer la matrice  $A^2$  puis établir que  $A^4 = I$ . En déduire les valeurs propres possibles de la matrice  $A$ .  
 b) Donner une base  $(u)$  de  $\text{Ker}(g - Id)$ .  
 c) Déterminer  $\text{Ker}(g + Id)$ .  
 d) En déduire que  $g$  n'est pas diagonalisable.  
 3) a) Résoudre l'équation  $A^2 X = -X$ , d'inconnue le vecteur  $X$  élément de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , et en déduire une base  $(v, w)$  de  $\text{Ker}(g^2 + Id)$ .  
 b) Montrer que la famille  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
 c) Écrire la matrice de  $g^2$  dans la base  $(u, v, w)$  et conclure.

## Exercice 3

On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $p$  un réel de  $]0, 1[$  et on pose  $q = 1 - p$ .

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité  $p$  et "Face" avec la probabilité  $q$ .

On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile".
- Soit si l'on a obtenu  $n$  fois "Face".

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $P_k$  (respectivement  $F_k$ ) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au  $k^{\text{ème}}$  lancer ».

On note  $T_n$  le nombre de lancers effectués,  $X_n$  le nombre de "Pile" obtenus et enfin  $Y_n$  le nombre de "Face" obtenus. On admet que  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que l'on ne cherchera pas à préciser.

- 1) Loi de  $T_n$ .

- a) Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , déterminer, en distinguant le cas  $k = 1$ , la probabilité  $P(T_n = k)$ .  
 b) Déterminer  $P(T_n = n)$ .  
 c) Vérifier que  $\sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$ .

- d) Établir que  $T_n$  possède une espérance et vérifier que  $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$ .

- 2) Loi de  $X_n$ .
- Donner la loi de  $X_n$ .
  - Vérifier que  $E(X_n) = 1 - q^n$ .
- 3) Loi de  $Y_n$ .
- Déterminer, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , la probabilité  $P(Y_n = k)$ .
  - Déterminer  $P(Y_n = n)$ .
  - Écrire une égalité liant les variables aléatoires  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$ , puis en déduire  $E(Y_n)$ .
- 4) Montrer que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $T$  dont on donnera la loi.
- 5) Simulation informatique.  
Compléter les trois instructions manquantes pour que le programme suivant simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et pour qu'il affiche, dans cet ordre, les valeurs prises par les variables aléatoires  $T_n$ ,  $X_n$  et  $Y_n$  à l'exécution de l'instruction " Writeln (t, x, y) ; ".

```

Program EDHEC_2012 ;
  Var  n, t, x, y : integer ;
       p : real ;
Begin
  Randomize ; t := 0 ; x := 0 ; y := 0 ;
  Readln(n) ;
  While (x = 0) and (t < n) do begin ----- ;
                                If random > p then -----
                                else ----- ;
                                end ;
  Writeln (t, x, y) ;
End.

```

## Problème

On désigne par  $\lambda$  un réel strictement positif et on considère la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$$

- Montrer que  $f$  est paire.
  - Établir que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge et donner sa valeur.
  - Montrer que la fonction  $f$  peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire  $X$  que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
- Justifier la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x f(x) dx$ .
  - En déduire que la variable aléatoire  $X$  possède une espérance, notée  $E(X)$ , et donner sa valeur.
- Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx$  converge et donner sa valeur.
  - En déduire que la variable aléatoire  $X$  possède une variance, notée  $V(X)$ , et donner sa valeur.
- On pose  $Y = X^2$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .
  - Donner l'expression de la fonction de répartition  $F_Y$  de la variable aléatoire  $Y$  à l'aide de la fonction de répartition  $F_X$  de la variable aléatoire  $X$ .
  - Déterminer une densité  $f_Y$  de  $Y$ , puis vérifier que  $Y$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

c) Retrouver alors sans calcul la valeur de  $V(X)$ .

5) Soit  $U$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

a) On pose  $W = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-U)$  et on admet que  $W$  est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de  $W$  et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire  $W$ .

b) En déduire une fonction Pascal dont l'en-tête est

**function vax(lambda: real) : real ;**

qui simule la loi de  $|X|$ .

c) Vérifier que la probabilité que  $X$  prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que  $X$  prenne des valeurs négatives.

En déduire une fonction Pascal, utilisant `random(2)`, dont l'en-tête est

**function x(lambda : real) : real ;**

qui simule la loi de  $X$ .

On suppose, dans la suite, que le paramètre  $\lambda$  est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de  $Y$ . On désigne par  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  de la loi de  $Y$ . Les variables  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  sont supposées définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que  $Y$ .

6) On considère des réels  $x_1, \dots, x_n$  strictement positifs, ainsi que la fonction  $L$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^n f_Y(x_k)$$

a) Exprimer  $L(\lambda)$ , puis  $\ln(L(\lambda))$  en fonction de  $\lambda, x_1, \dots, x_n$ .

b) On considère la fonction  $\varphi$ , définie pour tout réel  $\lambda$  de  $]0, +\infty[$ , par :

$$\varphi(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k.$$

Montrer que la fonction  $\varphi$  admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera  $z$  et que l'on exprimera en fonction de  $x_1, \dots, x_n$ . Que peut-on dire de  $z$  pour la fonction  $L$  ?

7) On pose dorénavant, toujours avec  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $Z_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n Y_k}$ .

On admet que  $Z_n$  est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

La suite  $(Z_n)_{n \geq 2}$  est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance* pour  $\lambda$ .

On admet que la variable aléatoire  $\sum_{k=1}^n Y_k$  admet pour densité la fonction  $f_n$  définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

a) En remarquant que  $\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t) dt = 1$ , montrer que  $Z_n$  possède une espérance et que :

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1} \lambda$$

b) Déterminer un estimateur  $Z_n'$ , fonction simple de  $Z_n$ , qui soit un estimateur sans biais de  $\lambda$ .

## ANNALES DE MATHÉMATIQUES



## EDHEC 2012 VOIE ECONOMIQUE

## CORRIGE

## EXERCICE I

1-a)

Faisons un raisonnement par récurrence : notons  $P_n$  la propriété  $0 \leq u_n < 1$ .

$u_0 = 0$ , donc on a  $0 \leq u_0 < 1$ .

Hérédité. Supposons la propriété  $P_n$  satisfaite pour un entier naturel  $n$  donné.

$0 \leq u_n < 1 \implies 0 \leq u_n^2 < 1$  car la fonction carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $1 \leq 1 + u_n^2 < 2$  et par suite, en divisant par  $2 > 0$ , on obtient  $\frac{1}{2} \leq \frac{1 + u_n^2}{2} < 1$ , soit  $u_{n+1} \in [\frac{1}{2}, 1[$ . Or  $[\frac{1}{2}, 1[ \subset [0, 1[$ , donc on a bien  $0 \leq u_{n+1} < 1$ .

La propriété est héréditaire et valable pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe du raisonnement par récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1[$  : L'intervalle  $[0, 1[$  est un intervalle stable pour la suite  $(u_n)$

**Remarque :** on aurait pu procéder autrement pour l'hérédité. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ . On a  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$f'(x) = x \geq 0$  sur  $\mathbb{R}_+$  et nulle en 0 uniquement. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , donc sur  $[0, 1[$ . Par conséquent,  $\forall x \in [0, 1[, f(x) \in [f(0), f(1)[ = [\frac{1}{2}, 1[ \subset [0, 1[$ .

$u_n \in [0, 1[ \implies f(u_n) = u_{n+1} \in [0, 1[$ .

1-b)

Utilisons la fonction  $f$ . Elle est strictement croissante sur  $[0, 1[$ , par conséquent la suite  $(u_n)$  est strictement monotone. Sa variation est donnée par la comparaison de  $u_0$  et  $u_1$ .

$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{2} > 0 = u_0$ .

La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante

1-c)

La suite  $(u_n)$  est croissante, majorée par 1. D'après le théorème des suites monotones bornées,

la suite  $(u_n)$  est convergente

La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; il s'ensuit que la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  vérifie la relation  $\ell = f(\ell)$ .

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = \frac{1 + \ell^2}{2} \iff 2\ell = 1 + \ell^2 \\ &\iff 1 + \ell^2 - 2\ell = 0 \iff (1 - \ell)^2 = 0 \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  converge vers 1

2-a)

Remarquons que la suite  $(\frac{1}{v_n})$  est définie puisque  $u_n \neq 1 \implies v_n = 1 - u_n \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 - u_{n+1})(1 - u_n)} \\ 1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{1 + u_n^2}{2} = \frac{2 - u_n^2 - 1}{2} \\ &= \frac{1 - u_n^2}{2} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{2} \\ u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{(1 - u_n^2)}{2} \quad \text{calcul fait en 1-c)} \\ \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 - u_{n+1})(1 - u_n)} &= \frac{\frac{(1 - u_n)^2}{2}}{(1 - u_n) \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{2}} \\ &= \frac{\frac{(1 - u_n)^2}{2}}{\frac{(1 - u_n)^2(1 + u_n)}{2}} \\ &= \frac{1}{1 + u_n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 + u_n} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}}$$

2-b)

D'après la propriété admise en début d'exercice,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) = \frac{1}{2}$ .

Or  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{v_n} - 1 \right)$  ("téléscopage additif"). On en conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{v_n} - 1 \right) = \frac{1}{2}$ .

D'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{v_n} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \frac{1}{v_n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n}$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$  et puisque  $\frac{1}{2} \neq 0$ ,  $\frac{1}{nv_n} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{2}$  ce qui équivaut à  $nv_n \underset{(+\infty)}{\sim} 2$ .

$$\boxed{nv_n \underset{(+\infty)}{\sim} 2, \text{ donc } v_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n}}$$

$$v_n \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{2}{n} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\frac{2}{n}} = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{v_n}{\frac{2}{n}} - 1 \right) = 0.$$

Posons  $\varepsilon_n = \frac{v_n}{\frac{2}{n}} - 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$  et  $\frac{v_n}{\frac{2}{n}} = 1 + \varepsilon_n \iff v_n = \frac{2}{n}(1 + \varepsilon_n)$ .

$$\text{Donc } 1 - u_n = \frac{2}{n}(1 + \varepsilon_n) \iff u_n = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n}\varepsilon_n$$

$$\boxed{u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

3-a)

function u(n : integer) : real ;

var y : real ; k : integer ;

Begin y := 0 ; for k := 1 to n do y := (sqrt(y)+1)/2 ;

u := y ;

End ;

page 2

Jean MALLET

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

3-b)

PROGRAM EDHEC 2012 ;

var n : integer ;

BEGIN

n := 0 ;

while (1-u(n)) &gt;= 0.001 do n := n+1 ;

write (' n = ', n) ;

END.

## EXERCICE II

1)

L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si matrice  $A = \text{Mat}_{B_c}(f)$  est diagonalisable. Ce qui équivaut à

$\exists P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), P$  inversible,  $\exists D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale telles que  $D = P^{-1}AP$ .

$D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AI_3AP = P^{-1}A^2P$  et puisque  $D^2$  est une matrice diagonale on conclut

$f$  diagonalisable implique  $f^2$  diagonalisable

2-a)

Un calcul sans difficultés donne  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

L'égalité  $A^4 - I = (0)$  indique que le polynôme  $P = X^4 - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ . D'après le cours on sait que l'ensemble des valeurs propres de  $A$  est inclus dans l'ensemble des racines réelles de ce polynôme (cet ensemble de valeurs propres peut être vide ; on dit aussi que les racines de  $P$  sont les valeurs propres éventuelles de  $A$ ).

$P(x) = 0 \iff x^4 - 1 = 0 \iff (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \iff (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ .

Les racines réelles de  $P$  sont 1 et -1

$\text{spect}(A) \subset \{-1, 1\} \iff \text{spect}(g) \subset \{-1, 1\}$

2-b)

- Détermination de  $\text{Ker}(g - \text{Id})$ .

$$\text{Mat}_{B_c}(g - I_d) = A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ;  $u \in \text{Ker}(g - \text{Id}) \iff (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0)$ . Cette égalité équivaut

successivement aux systèmes :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 3x - 8y + 5z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2y + 2z = 0 & L_3 = 2L_2, \quad \text{donc} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$