



EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



ANALYSE : INTÉGRALES

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE – XXVII

On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t .

- 1) Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ la fonction G est-elle définie ?
- 2) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $G(x, y)$ admet une limite positive finie lorsque y tend vers $+\infty$. On notera par la suite $G(x)$ cette limite.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y > 0$; montrer que

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right)$$

En considérant la suite de terme général $H_n = nG(n)$, en déduire que

$$G(n) = \ln \left(\frac{e}{n} (n!)^{\frac{1}{n}} \right)$$

- 4) Montrer que la série de terme général $H_n - H_{n-1} - \frac{1}{2n}$ est convergente.

En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- 5) Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXVII

1)

Notons g_x la fonction $t \mapsto \frac{t - [t]}{t(t+x)}$.

- Si $x > 0$, la fonction g_x est définie sur \mathbb{R}_+^*

Rappelons que la fonction $t \mapsto [t]$ est continue sur $\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$. Aux points $n \in \mathbb{N}^*$, elle est continue à droite et discontinue à gauche. Donc la fonction g_x est continue sur \mathbb{R}_+^* sauf aux points $n \in \mathbb{N}$.

En décomposant l'intervalle $[0; y]$ en $[0; 1[\cup [1; 2[\cup [2; n-1, n[\cup [n, y]$, on peut décomposer l'intégrale $\int_0^y g_x(t) dt$ en $\int_0^1 g_x(t) dt + \int_1^2 g_x(t) dt + \dots + \int_{n-1}^n g_x(t) dt + \int_n^y g_x(t) dt$.

- Sur chaque intervalle $[k, k+1[$ ($1 \leq k \leq n-1$) la restriction de g_x est prolongeable par continuité à gauche car $\lim_{t \rightarrow (k+1)^-} \frac{t - [t]}{t(t+x)} = \frac{1}{(k+1)(k+1+x)} \in \mathbb{R}$; les intégrales sont faussement impropres, donc convergentes.

- L'intégrale $\int_n^y g_x(t) dt$ se traite de la même façon si $y \in \mathbb{N}^*$, sinon il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

- L'intégrale $\int_0^1 g_x(t) dt$ est impropre en 0. Au voisinage de 0^+ , $[t] = 0$, donc $g_x(t) = \frac{t - [t]}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x}$.

La fonction g_x est prolongeable par continuité en 0^+ , l'intégrale $\int_0^1 g_x(t) dt$ est faussement impropre, donc convergente.

Si $x > 0$, $G(x, y)$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

- Si $x = 0$, alors $g_x(t) = \frac{t - [t]}{t^2} = \frac{1}{t}$ au voisinage de 0^+ . L'intégrale $\int_0^y g_x(t) dt$ est divergente.

$G(0, y)$ n'est pas définie.

- Si $x < 0$, notons $x = -a$ avec $a > 0$.

$g_{-a}(t) = \frac{t - [t]}{t(t-a)}$. Sur l'intervalle $[0, y]$, g_{-a} n'est pas définie en 0 (déjà vu) et en a à conditions que $a \in]0, y]$, c'est-à-dire que $-x \leq y$.

Si $-x > y$ c'est-à-dire $x < -y$, $G(x, y)$ est définie

Regardons maintenant le cas où $0 < a \leq y$.

- * Si $a \notin \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto t - [t]$ est continue sur un intervalle $] \alpha, \beta [\subset] 0, y [$ contenant a .

