ANALYSE : INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXVII

On pose, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t + x)} dt$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t.

1) Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ la fonction G est-elle définie ?

2) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $G(x, y)$ admet une limite positive finie lorsque y tend vers $+\infty$. On notera par la suite $G(x)$ cette limite.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y > 0$; montrer que

$$G(n, y) = \frac{1}{n}\Big(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt\Big)$$

En considérant la suite de terme général $H_n = nG(n)$, en déduire que

$$G(n) = \ln\left(\frac{e}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}\right)$$

4) Montrer que la série de terme général $H_n - H_{n-1} - \dfrac{1}{2n}$ est convergente.

En déduire un équivalent de $G(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO XXVII

1)

Notons g_x la fonction $t \mapsto \dfrac{t-[t]}{t(t+x)}$.

- Si $x > 0$, la fonction g_x est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Rappelons que la fonction $t \mapsto [t]$ est continue sur $\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$. Aux points $n \in \mathbb{N}^*$, elle est continue à droite et discontinue à gauche. Donc la fonction g_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf aux points $n \in \mathbb{N}$.

En décomposant l'intervalle $[0; y]$ en $[0; 1[\cup[1; 2[\cup[n-1, n[\cup[n, y]$, on peut décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_0^y g_x(t)dt$ en $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt + \int_1^2 g_x(t)dt + \cdots + \int_{n-1}^n g_x(t)dt + \int_n^y g_x(t)dt$.

- Sur chaque intervalle $[k, k+1[$ $(1 \leq k \leq n-1)$ la restriction de g_x est prolongeable par continuité à gauche car $\displaystyle\lim_{t\to(k+1)^+} \frac{t-[t]}{t(t+x)} = \frac{1}{(k+1)(k+1+x)} \in \mathbb{R}$; les intégrales sont faussement impropres, donc convergentes.

- L'intégrale $\displaystyle\int_n^y g_x(t)dt$ se traite de la même façon si $y \in \mathbb{N}^*$, sinon il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt$ est impropre en 0. Au voisinage de $0^+, [t] = 0$, donc $g_x(t) = \dfrac{t}{t(t+x)} = \dfrac{1}{t+x}$.

La fonction g_x est prolongeable par continuité en 0^+, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_x(t)dt$ est faussement impropre, donc convergente.

Si $x > 0$, $G(x, y)$ est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

- Si $x = 0$, alors $g_x(t) = \dfrac{t-[t]}{t^2} = \dfrac{1}{t}$ au voisinage de 0^+. L'intégrale $\displaystyle\int_0^y g_x(t)dt$ est divergente.

$G(0, y)$ n'est pas définie.

- Si $x < 0$, notons $x = -a$ avec $a > 0$.

$g_{-a}(t) = \dfrac{t-[t]}{t(t-a)}$. Sur l'intervalle $[0, y]$, g_{-a} n'est pas définie en 0 (déja vu) et en a **à conditions que** $a \in]0, y]$**, c'est-à-dire que** $-x \leq y$.

Si $-x > y$ c'est-à-dire $x < -y$, $G(x, y)$ est définie

Regardons maintenant le cas où $0 < a \leq y$.

$*$ Si $a \notin \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto t-[t]$ est continue sur un intervalle $]\alpha, \beta] \subset]0, y]$ contenant a.