ANALYSE POLYNOMES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXVI

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n \ : \ z \mapsto nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \cdots - z - 1$$

1) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$: $P_n(z) = 0 \Longrightarrow P_n(|z|) \leq 0$.

2) Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto (x-1)P_n(x)$ (on commencera par simplifier l'expression de $f(x)$).

En déduire que si $P_n(z) = 0$, alors $|z| \leq 1$.

3) Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que : $|(z-1)P_n(z) - 1| \leq \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$; en déduire que pour $n \geq 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

c) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x}(2x^2 - x + 1)$, pour $x \geq \sqrt{2}$.

(On donne $e \simeq 2.7$)

En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$.

4) En déduire que si z est une solution complexe de l'équation $P_n(z) = 0$, alors on a :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < |z| \leq 1.$$