ANALYSE POLYNOMES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXVI

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynôme P_n définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P_n \ : \ z \mapsto nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \cdots - z - 1$$

1) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$: $P_n(z) = 0 \Longrightarrow P_n(|z|) \leq 0$.

2) Etudier les variations de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto (x-1)P_n(x)$ (on commencera par simplifier l'expression de $f(x)$).

En déduire que si $P_n(z) = 0$, alors $|z| \leq 1$.

3) Soit z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que : $|(z-1)P_n(z) - 1| \leq \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$; en déduire que pour $n \geq 2$:

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

c) Etudier les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x}(2x^2 - x + 1)$, pour $x \geq \sqrt{2}$.

(On donne $e \simeq 2.7$)

En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$.

4) En déduire que si z est une solution complexe de l'équation $P_n(z) = 0$, alors on a :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < |z| \leq 1.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.