



## EXERCICES DE MATHEMATIQUES



### ANALYSE POLYNOMES

#### ENONCE DE L'EXERCICE-XXVI

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on considère la fonction polynôme  $P_n$  définie sur  $\mathbb{C}$  par :

$$P_n : z \mapsto nz^n - z^{n-1} - z^{n-2} - \dots - z - 1$$

- 1) Montrer que pour  $z \in \mathbb{C} : P_n(z) = 0 \implies P_n(|z|) \leq 0$ .
- 2) Etudier les variations de la fonction  $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto (x-1)P_n(x)$  (on commencera par simplifier l'expression de  $f(x)$ ).

En déduire que si  $P_n(z) = 0$ , alors  $|z| \leq 1$ .

- 3) Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $|z| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

- a) Montrer que :  $|(z-1)P_n(z) - 1| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1)$ .

- b) Montrer que pour tout réel  $x > -1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$  ; en déduire que pour  $n \geq 2$  :

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

- c) Etudier les variations de la fonction  $x \mapsto e^{-x}(2x^2 - x + 1)$ , pour  $x \geq \sqrt{2}$ .

(On donne  $e \simeq 2.7$ )

En déduire que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n (2n - \sqrt{n} + 1) < 1$ .

- 4) En déduire que si  $z$  est une solution complexe de l'équation  $P_n(z) = 0$ , alors on a :

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < |z| \leq 1.$$