ANALYSE : SERIES

ENONCE DE L'EXERCICE–XVIII

Soit $a \in]0;1[$. On définit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$$

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{(n+1)^{1-a}-1}{1-a} \leq S_n \leq \frac{n^{1-a}-1}{1-a} + 1$$

2) Déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} - S_n$.

a) Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

b) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $S_n = \dfrac{n^{1-a}-1}{1-a} + \ell + o(1)$.

4) Dans cette question on s'intéresse à la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

a) Prouver la convergence de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{k^a}\right)$.

b) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^a}$.

Calculer sa somme en fonction de ℓ et de a.