ALGEBRE LINEAIRE : MATRICES

ENONCE DE L'EXERCICE–XXIV

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$A^2 = I_3 \qquad \textbf{(1)}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose également que $A \neq I_3$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant (1). Montrer que $\text{im}(A - I_3) \subset \ker(A + I_3)$. En déduire que l'une des matrices $A - I_3$ ou $A + I_3$ est de rang inférieur ou égal à 1.

2) Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque de rang inférieur ou égal à 1.

Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ tels que le terme général $b_{i,j}$ de la matrice B s'écrive $b_{i,j} = \lambda_i \mu_j$.

En déduire que $B^2 = \text{tr}(B)B$ où $\text{tr}(B)$ représente la trace de la matrice B, c'est-à-dire la somme de ses termes diagonaux.

3) On suppose que la matrice $B = A - I_3$ de la première question est de rang 1. Montrer que $\text{tr}(B) = -2$.

4) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation matricielle (1).

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.