



EXERCICES DE MATHEMATIQUES



ALGÈBRE LINÉAIRE

ENONCE DE L'EXERCICE-XXXVI

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications continues sur $[0; 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On note E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des applications de classe C^1 sur $[0; 1]$ et à valeurs réelles.

Pour tout $f \in E$, on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\int_0^1 L(f)(t)dt = 0$.

1) Vérifier que l'application L est ainsi bien définie et constitue une application linéaire de E vers E .

2-a) Déterminer le noyau de L .

b) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1 . La restriction de L à E_1 réalise-t-elle un automorphisme de E_1 ?

3) Montrer que pour tout t et tout x de $[0; 1]$, on a $L(f)(t) = \int_0^1 \left(\int_x^t f(u)du \right) dx$.

4) On pose $L^0 = \text{Id}$ et, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = L \circ L^{n-1}$.

Pour tout x de $[0; 1]$, on pose alors $P_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$, $P_n(x) = L^n(P_0)(x)$.

a) Calculer P_1 , P_2 , P_3 .

b) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

c) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k^2$.