PROBABILES DISCRETES

ENONCE DE L'EXERCICE–IV

1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note D_N l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, N\}$ qui ne laissent aucun terme invariant (c'est-à-dire que si s est une telle permutation de $\{1, 2 \ldots, N\}$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, N\},\ s(i) \neq i$)

Pour $r \in [\![1, N]\!]$, on note A_r l'ensemble des permutations de $\{1, 2 \ldots, N\}$ qui laissent le nombre r invariant.

Soit $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq N$. Calculer $\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots \cap A_{i_k})$

En déduire que $\text{Card}(D_N) = N! \sum_{r=0}^{N} \frac{(-1)^r}{r!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $I(k, n)$ le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qui laissent exactement k termes invariants.

2) Montrer que $I(k, n) = \binom{n}{k} I(0, n-k)$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I(0, k)$

3) Soit X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'éléments invariants dans une permutation aléatoire.

Calculer $E(X_n)$.

4) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable X qui suit une loi de Poisson que l'on déterminera.

 Jean MALLET