ANALYSE : SERIES INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–II

1) Soit pour $n \geq 1$, la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}$.

On considère les suites $W_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} w_k$ et $W_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} w_k$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que la série de terme général w_n est convergente.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ converge (on pourra poser $t = x^2$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx$ et $v_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)|dx$

3) Etudier la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n

Que peut-on en déduire quant à la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|dx$?

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO II

1)

$$\begin{aligned} W_{2n+2} - W_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} < 0 \\ W_{2n+3} - W_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{(2n+3)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} > 0 \end{aligned}$$

La suite $(W_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et la suite $(W_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.

$W_{2n+2} - W_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(W_{2n+2} - W_{2n+1}) = 0$

> Les suites $(W_{2n})_{n\geq 1}$ et $(W_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite réelle. Il en résulte que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est convergente puisque les deux suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes vers une même limite.
>
> Par définition, **cela signifie que la série de terme général w_n est convergente**

2)

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et sin sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ est impropre en $+\infty$ et elle converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$ converge.

- Soit $A \geq 1$. Posons $J(A) = \displaystyle\int_1^A \sin(x^2)dx$. Effectuons le changement de variable $t = x^2$; $dt = 2xdx$, donc $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

$$J(A) = \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Intégrons l'intégrale $2J(A)$ par parties :

$u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; $u'(t) = -\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}$; $v'(t) = \sin t$; $v(t) = -\cos t$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, l'intégration par parties est légitimée.

$$\begin{aligned} 2J(A) &= \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^{A^2} - \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}}dt \\ &= \left(-\frac{\cos A^2}{A} + \cos 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}}dt \end{aligned}$$

- On a : $0 \leq \left|\dfrac{\cos A^2}{A}\right| \leq \dfrac{1}{A}$; par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\cos A^2}{A} = 0$
- $\left|\dfrac{\cos t}{t\sqrt{t}}\right| \leq \dfrac{1}{t\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$