ANALYSE : SERIES INTEGRALES

ENONCE DE L'EXERCICE–II

1) Soit pour $n \geq 1$, la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n\pi}}$.

On considère les suites $W_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} w_k$ et $W_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} w_k$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que la série de terme général w_n est convergente.

2) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ converge (on pourra poser $t = x^2$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit :

$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)dx$ et $v_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |\sin(x^2)|dx$

3) Etudier la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n

Que peut-on en déduire quant à la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)|dx$?

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO II

1)

$$W_{2n+2} - W_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}} < 0$$

$$W_{2n+3} - W_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} = -\frac{1}{\sqrt{(2n+3)\pi}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} > 0$$

La suite $(W_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et la suite $(W_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.

$$W_{2n+2} - W_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{(2n+2)\pi}} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (W_{2n+2} - W_{2n+1}) = 0$$

Les suites $(W_{2n})_{n\geq 1}$ et $(W_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite réelle. Il en résulte que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est convergente puisque les deux suites extraites d'indices pairs et impairs sont convergentes vers une même limite.

Par définition, **cela signifie que la série de terme général w_n est convergente**

2)

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et sin sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ est impropre en $+\infty$ et elle converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$ converge.

- Soit $A \geq 1$. Posons $J(A) = \int_1^A \sin(x^2)dx$. Effectuons le changement de variable $t = x^2$; $dt = 2xdx$, donc $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$.

$$J(A) = \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Intégrons l'intégrale $2J(A)$ par parties :

$u(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; $u'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$; $v'(t) = \sin t$; $v(t) = -\cos t$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, l'intégration par parties est légitimée.

$$2J(A) = \Big[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Big]_1^{A^2} - \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$$

$$= \Big(-\frac{\cos A^2}{A} + \cos 1\Big) - \frac{1}{2}\int_1^{A^2} \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} dt$$

- On a : $0 \leq \Big|\frac{\cos A^2}{A}\Big| \leq \frac{1}{A}$; par le théorème d'encadrement, $\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A^2}{A} = 0$
- $\Big|\frac{\cos t}{t\sqrt{t}}\Big| \leq \frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.