**CCP_PSI_2011**

Filière PSI et même texte allégé pour les MP

**Q1 :**

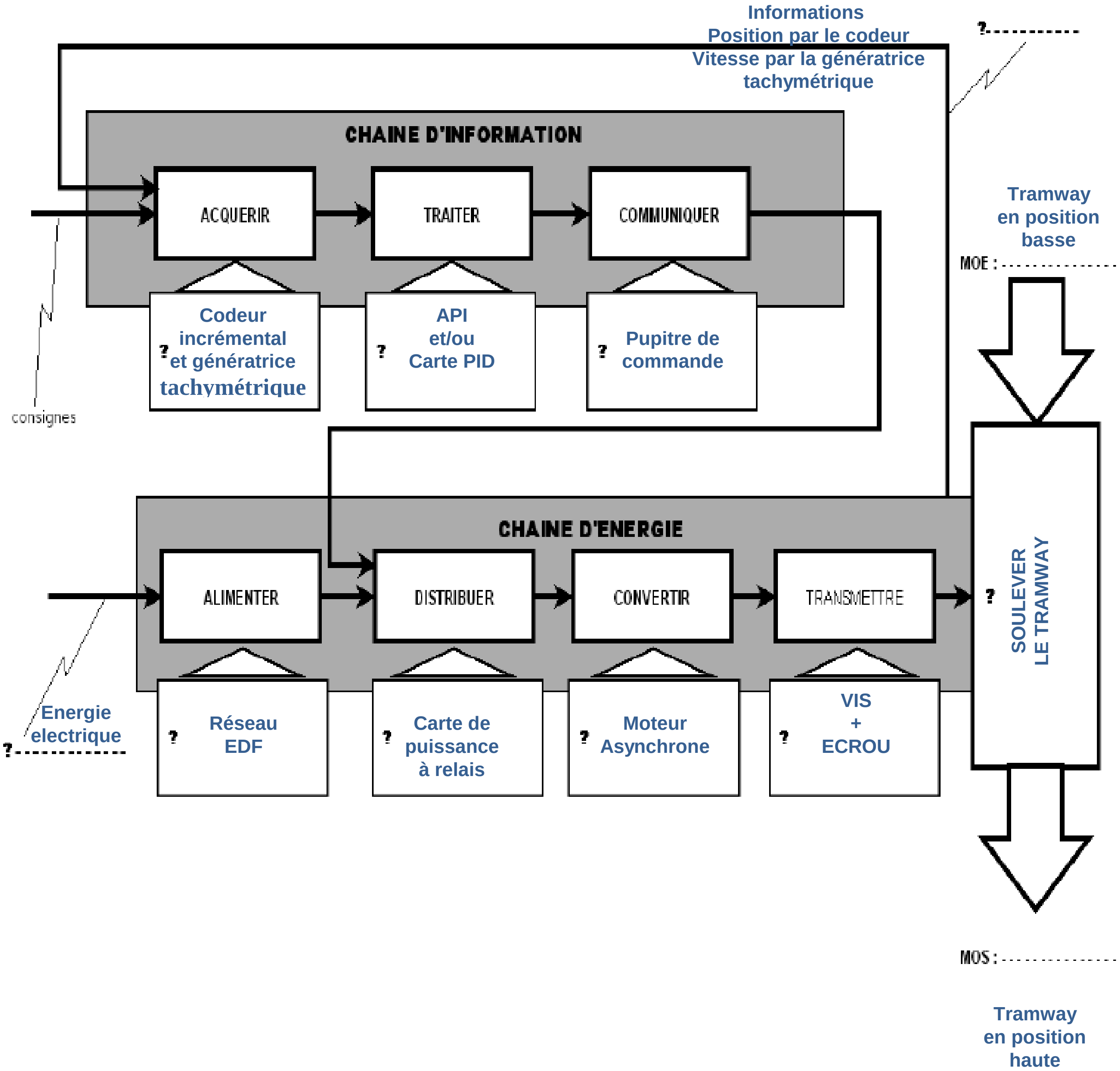
**a -** *Compléter sur le document réponse DRI le diagramme représentant l'architecture de la chaîne d'information et de la chaîne d'énergie du système de levage étudié.*

**b -** *Compléter sur le document réponse DR2 le schéma cinématique minimal 3D d'une colonne de levage.*

On rappel quelques abréviations employées sur le document réponses ci-dessous :

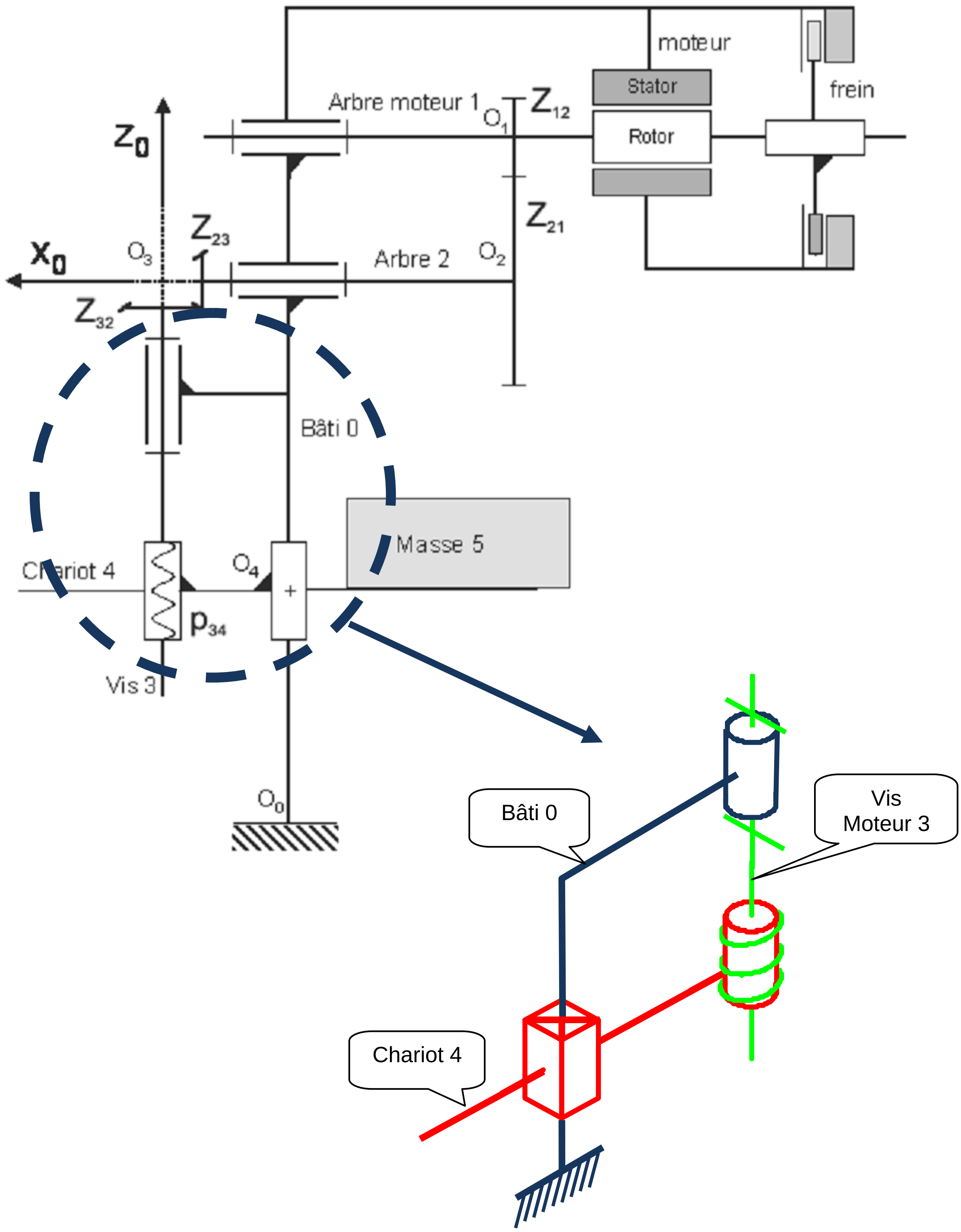
- MOE : Matière d'Oeuvre Entrante
- MOS : Matière d'Oeuvre Sortante

Pour compléter la chaîne d'information et d'énergie ci-dessous, il faut récupérer les éléments sur les deux FAST données page 4 de l'énoncé

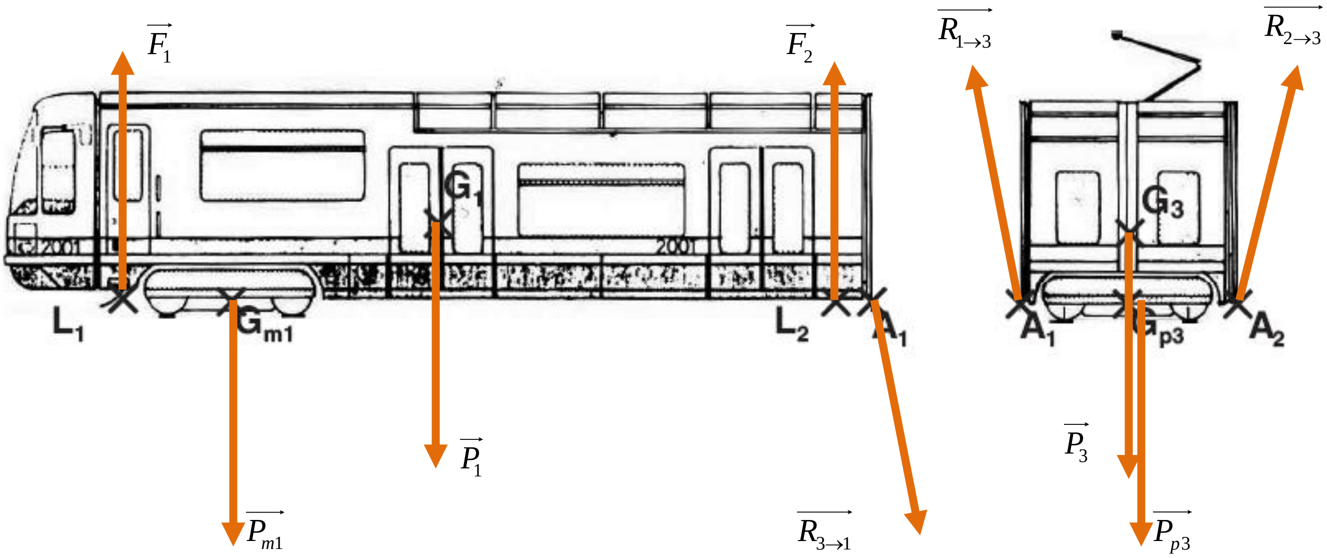



 **Emmanuel FARGES** 

Il faut reproduire en 3D sur le document réponse la partie entourée de l'annexe ci-dessous :



**Q2 :** *Dessiner sur le document réponse DR2 les vecteurs représentant les actions mécaniques extérieures (en phase de levage) agissant sur les deux voitures isolées (avec boggies) {V1, Bm1} et {V3, Bp3} en respectant directions et sens.*



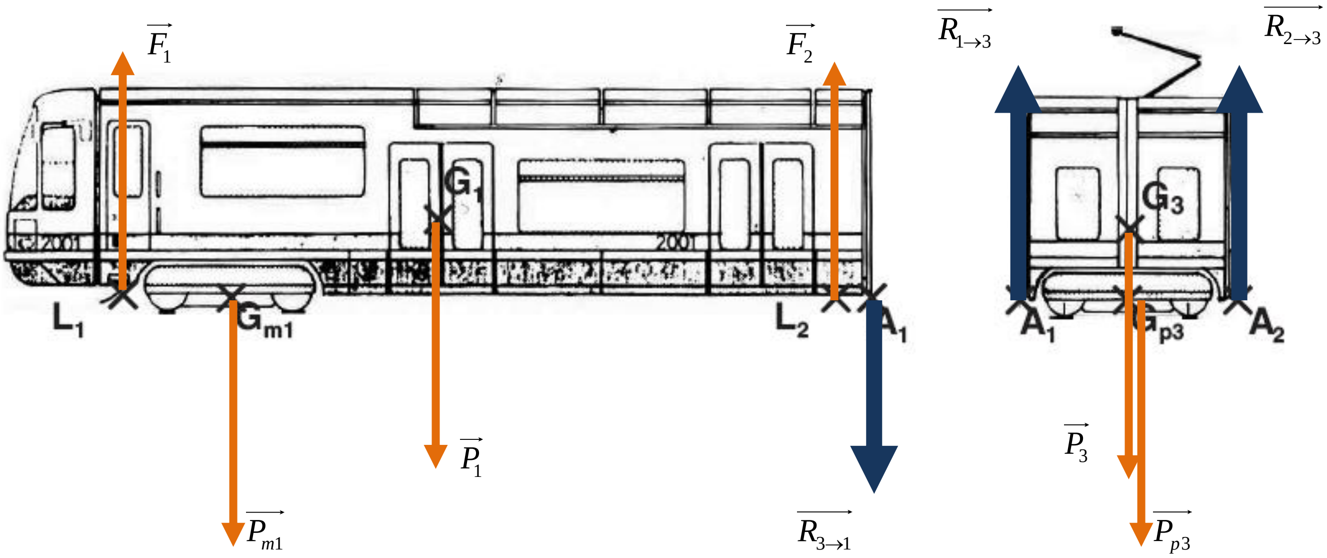

On veille à respecter le principe des actions mutuelles : $\overrightarrow{R_{1\to3}} = -\overrightarrow{R_{3\to1}}$

On notera qu'à priori, à ce stade on ne place pas les efforts entre les différentes voitures dans une direction particulière.

Cependant même si l'énoncé ne semble pas demander de se justifier, il faut aller plus loin que le tracer des vecteurs en reprenant les données brutes du modèle retenu.

Le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}_0$ à la voiture 1 puis à la voiture 3

$m \underbrace{\vec{a}(G_i/0).\vec{x}_0}_{\text{0 car levage suivant la verticale}} = \sum \overrightarrow{F_{extérieures}}.\vec{x}_0$ permet de montrer qu'elles n'ont pas de composantes suivant $\vec{x}_0$, donc elles sont verticales, d'où la figure ci-dessous :



**Q3 :** *Exprimer les actions mécaniques des colonnes de levage en LI et L2, en fonction des grandeurs géométriques et des poids des différents éléments du tramway. Calculer ces actions mécaniques. (Chacune de ces actions est supportée identiquement par deux colonnes).*

Remarque :
Etant donné que l'énoncé ne fait pas référence à une accélération, on supposera !!! que l'on est en phase de montée à vitesse constante, c'est-à-dire en équilibre dans le repère en translation verticale.
On fait donc un raisonnement de statique.

Le problème étant considéré comme plan, on aura trois équations non triviale.
Toutes les forces étant verticale, seules deux seront intéressantes :
Théorème de la résultante sur $\vec{z}_0$ + le théorème du moment suivant la normale au plan : $\vec{y}_0$

- On isole V1 et on écrit le théorème du moment en A1 (afin « d'éviter » $\overrightarrow{R_{3\to1}}$ dans l'équation)

Théorème de la résultante sur $\vec{z}_0$ : $F_1+F_2-P_{m1}-P_1-R_{3\to1}=0 \quad (1)$

Théorème du moment suivant $(A_1\vec{y}_0)$ :

$$-13280F_1-(13280-12505)F_2+(13280-1980)P_{m1}+(13280-5510)P_1=0 \quad (2)$$

- On isole V3 :

Théorème de la résultante sur $\vec{z}_0$ : $R_{1\to3}+R_{2\to3}-P_3-P_{p3}=0 \quad (3)$

Théorème du moment suivant $(G_{p3}\vec{y}_0)$ : $-1650R_{1\to3}+1650R_{2\to3}=0 \quad (4)$

(4) donne $R_{1\to3}=R_{2\to3}$

En le reportant dans (3), on obtient : $R_{1\to3}=\dfrac{P_3+P_{p3}}{2}$

Ce qui donne le système d'équation 1 et 2 réécrit :

$$\begin{cases} F_1+F_2-P_{m1}-P_1-\dfrac{P_3+P_{p3}}{2}=0 \quad (5) \\ -13280F_1-775F_2+11300P_{m1}+7770P_1=0 \quad (6) \end{cases}$$

Ce qui donne :

- En constituant 13280(5)+(6) : $12505F_2-1980P_{m1}-5510P_1-6640(P_3+P_{p3})=0 \quad (7)$
- En constituant 775(5)+(6) : $-12505F_1+10525P_{m1}+6995P_1-\dfrac{775}{2}(P_3+P_{p3})=0 \quad (8)$

Soit : $F_2=\dfrac{1980P_{m1}+5510P_1+6640(P_3+P_{p3})}{12505}$ et $F_1=\dfrac{10525P_{m1}+6995P_1-387,5(P_3+P_{p3})}{12505}$

Etant donné la modélisation plane, il y a en fait 2 colonnes en L1 et L2, on obtient, avec les masses données en annexe :

Tramway de masse totale 44,6 tonnes
Bm1 et Bm2 : boggies moteurs de masse 5,9 tonnes chacun
Bp3 : boggie porteur de masse 4,3 tonnes
V1 et V2 : voitures motrices de masse 12,7 tonnes chacune (sans boggie)
V3 : voiture d'articulation de masse 3,1 tonnes (sans boggie)

$\boxed{\frac{F_2}{2} \simeq 52300N}$ et $\boxed{\frac{F_1}{2} \simeq 59200N}$

Ceci reste en dessous de la charge maxi du cahier des charges de 8,2 tonnes (soit 80442 N)

**Q4 :**

**a -** *Exprimer de manière littérale, en fonction du paramètre $\dot{\theta}_1$, et des données concernant les roues dentées et le système vis-écrou, les vecteurs vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{2/0}$, $\vec{\Omega}_{3/0}$ et la vitesse de levée $V_L = \dot{z}_4$.*

**b -** *Déterminer la vitesse de rotation du moteur souhaitée (à exprimer en tr/min) conformément au cahier des charges. Conclure en comparant la valeur trouvée avec la vitesse nominale du moteur (voir Annexe 2 figure 5).*

**a-**

D'après les relations des transmissions de puissance par roue dentées : $\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} = r_{12} = -0,2$ et

$$\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} = \frac{Z_{23}}{Z_{32}} = r_{23} = 0,4$$

Or $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta}_2 \vec{x}_0$ et $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \vec{x}_0$. Donc $\boxed{\vec{\Omega}_{2/0} = -\frac{Z_{12}}{Z_{21}} \dot{\theta}_1 \vec{x}_0}$

De plus $\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\theta}_3 \vec{z}_0$. Donc $\boxed{\vec{\Omega}_{3/0} = \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{21} Z_{32}} \dot{\theta}_1 \vec{z}_0}$

Pour la vitesse de levée, il faut utiliser la relation caractéristique de la liaison hélicoïdale : $V = \frac{p\omega}{2\pi}$, qui s'écrit ici, en fonction des caractéristiques de l'énoncé :

$V_L = \frac{p_{34} \omega_{3/0}}{2\pi} \Rightarrow r_{34} = \frac{p_{34}}{2\pi} = 0,7958\ mm$, d'où : $\boxed{V_L = \frac{p_{34} Z_{12} Z_{23}}{2\pi Z_{21} Z_{32}} \dot{\theta}_1}$

Soit $r_g = \frac{p_{34} Z_{12} Z_{23}}{2\pi Z_{21} Z_{32}} = 6,36.10^{-2}\ mm = 6,36.10^{-5}\ m$

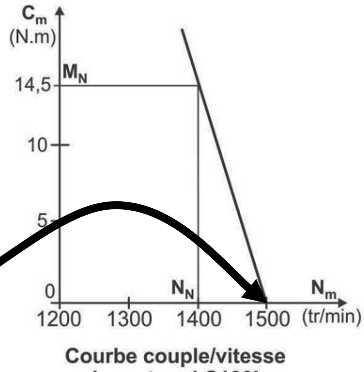
**b-**

Le cahier des charge impose une vitesse maxi de $10\ mm/s = V_{L\max}$.

On a donc en « inversant » la relation précédente : $\dot{\theta}_1 = \frac{2\pi Z_{21} Z_{32}}{p_{34} Z_{12} Z_{23}} V_L$ ce qui donne en $tr/\min$ :

$$\boxed{N_1 = \frac{60 Z_{21} Z_{32}}{p_{34} Z_{12} Z_{23}} V_L = \frac{60 \times 75 \times 35}{5.\cancel{10^{-3}} \times 15 \times 14} 10.\cancel{10^{-3}} = 1500 \text{ tr/min}}$$

Ceci est supérieure à la vitesse nominale du moteur puisqu'elle est donnée pour $1400$ tr/min, mais sans charge (couple nul), on constate sur la courbe caractéristique du moteur ci-contre que celui-ci peut atteindre les $1500$ tr/min sans charge, c'est-à-dire sans Tramway à soulever.




Courbe couple/vitesse du moteur LS100L

**Q5 :**

**a -** *Déterminer les expressions littérales des énergies cinétiques des différents solides du système S (arbre 1, arbre 2, vis 3, chariot 4, masse 5) en mouvement par rapport au repère galiléen $R_0$, en fonction des données cinétiques fournies (voir Annexe 2 figure 4), des rapports $r_{ij}$ et du paramètre $\dot{\theta}_1$.*

**b -** *Montrer, en vous appuyant sur les valeurs numériques proposées, que les énergies cinétiques des solides 2, 3, 4 et 5 sont négligeables devant l'énergie cinétique du solide 1.*

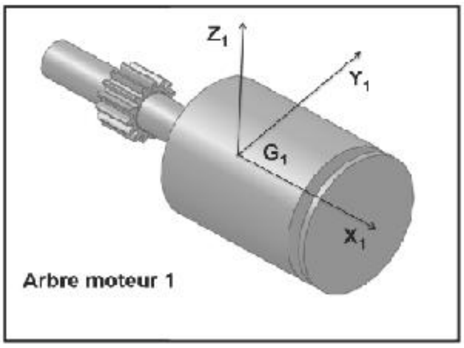
**c -** *Déterminer littéralement et numériquement le rendement global du système, noté $\eta_g$, en fonction des différents rendements.*

**d -** *Déterminer l'expression de la puissance perdue dans les liaisons en fonction de la puissance motrice $P_m$ et du rendement global $\eta_g$.*

**a-**

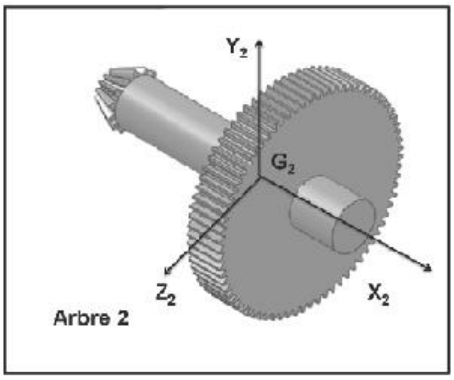
- Le solide 1 est en rotation autour de l'axe fixe $(O_1\vec{x}_0)$ à la vitesse de rotation $\dot{\theta}_1$. Cet axe coïncide avec l'axe $(G_1\vec{x}_1)$ de la figure ci-contre (base locale su solide 1). L'inertie $I_{(O_1\vec{x}_0)}$ vaut donc $I_{(G_1\vec{x}_1)} = A_1 = 10,5.10^{-3}\ \text{Kg.m}^2$. On a donc :

$$\boxed{E_c(1/0) = \frac{1}{2}A_1\dot{\theta}_1^2}$$



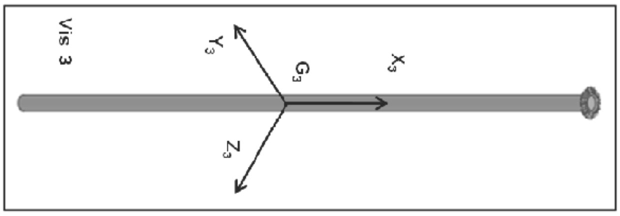

- Le solide 2 est en rotation autour de l'axe fixe $(O_2\vec{x}_0)$ à la vitesse de rotation $\dot{\theta}_2 = r_{12}\dot{\theta}_1$. Cet axe coïncide avec l'axe $(G_2\vec{x}_2)$ de la figure ci-contre (base locale su solide 2). L'inertie $I_{(O_2\vec{x}_0)}$ vaut donc $I_{(G_2\vec{x}_2)} = A_2 = 16,2.10^{-3}\ \text{Kg.m}^2$. On a donc :

$$\boxed{E_c(2/0) = \frac{1}{2}A_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}A_2 r_{12}^2\dot{\theta}_1^2}$$




- Le solide 3 est en rotation autour de l'axe fixe $(O_3\vec{z}_0)$ à la vitesse de rotation $\dot{\theta}_3 = r_{12}r_{23}\dot{\theta}_1$. Cet axe coïncide avec l'axe $(G_3\vec{x}_3)$ de la figure ci-contre (base locale su solide 3). L'inertie $I_{(O_3\vec{z}_0)}$ vaut donc $I_{(G_3\vec{x}_3)} = A_3 = 13,6.10^{-3}\ \text{Kg.m}^2$. On a donc :

$$\boxed{E_c(3/0) = \frac{1}{2}A_3\dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2}A_3 r_{12}^2 r_{23}^2\dot{\theta}_1^2}$$



- Le solide 4 est en translation à la vitesse de $\dot{z}_4 = \dfrac{p_{23}}{2\pi} r_{12} r_{23} \dot{\theta}_1$. On a donc :

$$\boxed{E_c(4/0) = \frac{1}{2}\dot{z}_4^2 = \frac{1}{2} M_4 \frac{p_{34}^2 r_{12}^2 r_{23}^2}{4\pi^2}\dot{\theta}_1^2}$$

- Le solide 5 est en translation à la vitesse de $\dot{z}_4 = \dfrac{p_{23}}{2\pi} r_{12} r_{23} \dot{\theta}_1$. On a donc :

$$\boxed{E_c(5/0) = \frac{1}{2}\dot{z}_4^2 = \frac{1}{2} M_5 \frac{p_{34}^2 r_{12}^2 r_{23}^2}{4\pi^2}\dot{\theta}_1^2}$$

**b-**

Numériquement, on obtient les quantités suivantes comparables, homogènes aux inerties ramenées sur l'arbre moteur:

Arbre 1 : $A_1 = 10{,}5.10^{-3}\ \text{Kg.m}^2$

Arbre 2 : $A_2 r_{12}^2 = 64{,}8.10^{-5}\ \text{Kg.m}^2$

Vis 3 $A_3 r_{12}^2 r_{23}^2 = 8{,}7.10^{-5}\ \text{Kg.m}^2$

Chariot 4 : $M_4 \dfrac{p_{34}^2 r_{12}^2 r_{23}^2}{4\pi^2} \simeq 8{,}8.10^{-8}\ \text{Kg.m}^2$

Masse 5 : $M_5 \dfrac{p_{34}^2 r_{12}^2 r_{23}^2}{4\pi^2} = 24{,}3.10^{-6}\ \text{Kg.m}^2$

On constate donc bien que du point de vue énergétique, c'est l'arbre moteur 1 qui en a le plus et que les autres sont des rapports plus petit que 0,1 donc négligeable. La somme des inerties négligées vaut environ $76.10^{-5}\ \text{Kg.m}^2$ soit $\dfrac{76.10^{-5}}{10{,}5.10^{-3}} = 7{,}24\%$ de l'inertie de l'arbre 1.

On peut donc bien négliger toutes les inerties devant celle de l'arbre 1 (inférieure à 10%)

**c-**

Le rendement global d'une chaine de transmission est le produit des rendements de chaque élément de la chaîne puisque $\text{Puissance}_{\text{sortie}} = \eta\ \text{Puissance}_{\text{entrée}}$ pour chacun des éléments.

On a donc $\boxed{\eta_g = \eta_{12}.\eta_{23}.\eta_{34} = 32{,}4\ \%}$

Ne pas tenir compte du rendement du moteur puisque celui-ci correspond au ratio : $\dfrac{P_{méca} = C_m \omega_m}{P_{élec} = U.I}$. Or on ne s'intéresse qu'à la partie mécanique du moteur donc la puissance d'entrée du mécanisme est la puissance en sortie du moteur c'est-à-dire la puissance mécanique disponible.
Ce n'est pas un piège de l'énoncé, c'est juste que ce rendement figure dans l'extrait des caractéristiques de la série de moteur proposé ☹

**d-**

La puissance perdue à l'intérieure du mécanisme vaut donc le complémentaire du rendement soit :

$$\boxed{P_{perdue} = -(1-\eta_g) P_{fournie} = -(1-\eta_g) C_m \dot{\theta}_1}$$

**Remarque :**
Pour le signe il faut juste que lorsque l'on fera intervenir cette puissance interne dans le théorème de l'Energie Cinétique, elle soit négative. On écrira donc + une quantité négative (comme ci-dessus) ou – une quantité positive si on choisit de donner comme expression de la puissance perdue :
$P_{perdue} = (1-\eta_g)C_m\dot{\theta}_1$

**Q6 :** *Déterminer l'expression littérale du couple moteur $C_m$ en fonction de $\ddot{\theta}_1$.*

On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble des solides 1+2+3+4+5 en ne tenant compte que de l'énergie cinétique de 1 : $E_c(1+2+3+4+5/0) = E_c(1/0) = \frac{1}{2}A_1\dot{\theta}_1^2$

*Bilan des puissances :*

- Extérieures :

  $P(stator \to rotor = 1/0) = C_m\omega_m = C_m\dot{\theta}_1$

  $P(\vec{g} \to 5/0) = -M_5 g\dot{z}_4 = -M_5 gr_g\dot{\theta}_1$ La puissance est prise négative car on est en phase de soulevement du tramway. De plus, on néglige la masse de 4 devant celle de 5 et les autres éléments de l'isolement (1, 2 et 3 ne « se soulève pas » donc la pesanteur ne développe pas de puissance sur ces éléments.)

- Intérieures :

  $P_{perdue} = -(1-\eta_g)C_m\omega_m = -(1-\eta_g)C_m\dot{\theta}_1$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :
$$A_1\dot{\theta}_1\ddot{\theta}_1 = C_m\dot{\theta}_1 - M_5 gr_g\dot{\theta}_1 - (1-\eta_g)C_m\dot{\theta}_1 = \eta_g C_m\dot{\theta}_1 - M_5 gr_g\dot{\theta}_1$$
En simplifiant par $\dot{\theta}_1$, on obtient : $A_1\cancel{\dot{\theta}_1}\ddot{\theta}_1 = \eta_g C_m\cancel{\dot{\theta}_1} - M_5 gr_g\cancel{\dot{\theta}_1}$

Soit : $A_1\ddot{\theta}_1 = \eta_g C_m - M_5 gr_g$, d'où l'expression du couple moteur :
$$\boxed{C_m = \frac{A_1\ddot{\theta}_1 + M_5 gr_g}{\eta_g}}$$

**Q7 :** *Phase de montée à vitesse constante*

**a -** *Déterminer l'expression de $C_m$ et sa valeur numérique lors d'une montée à vitesse constante.*

**b -** *Comparer cette valeur avec celle du « moment nominal $M_N$ » fournie dans la documentation du moteur (voir Annexe 2 figure 5).*

**c -** *Quelle serait alors la vitesse de rotation du moteur (exprimée en tr/min) et la vitesse de levée (exprimée en m/s) ? Conclure quant à la pertinence du choix du moteur pour cette phase.*

**a-**

Lors de la phase de montée à vitesse constante $\dot{z}_4 = \text{constante}$ donc $\dot{\theta}_1 = \text{constante}$ donc $\boxed{\ddot{\theta}_1 = 0}$

On a donc $C_m = \frac{A_1\cancel{\ddot{\theta}_1} + M_5 gr_g}{\eta_g}$, soit : $\boxed{C_m = \frac{M_5 gr_g}{\eta_g}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_m = 11{,}55 \text{ Nm}}$

**b-**

Pour la référence du moteur utilisé, on lit figure 5 la valeur du couple nominal $M_N$ : 14,5 Nm
On peut donc conclure que le système pourra soulever le tramway à vitesse constante. Ce qui revient à dire que le moteur utilisé a suffisamment de couple pour « compenser » le poids du tramway.

Reste à savoir si il aura suffisamment de couple et de puissance pour l'accélérer jusqu'à la vitesse stabilisée voulue. !!!

**c-**

Pour la valeur du couple déterminé à la partie a), on trouve sur la courbe caractéristique du moteur LS100L de l'ordre de :

$\boxed{N_m = 1420 \text{ tr.min}^{-1}}$ (voir ci-contre)

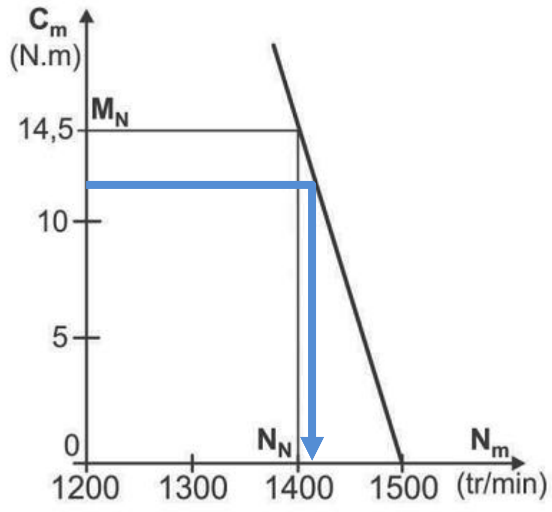
Ceci correspond à :

$$\boxed{\omega_m = \frac{2\pi.1420}{60} = 148{,}7 \text{ rad.s}^{-1}}$$

Soit une vitesse de levée :

$$\boxed{\dot{z} = r_g \omega_m = 6.36.10^{-5}.148{,}7 = 9{,}45 \text{ mm.s}^{-1}}$$

C'est légèrement inférieur à la vitesse maximale désirée dans le cahier des charges, le choix du moteur n'est donc pas pertinent !!!




**Courbe couple/vitesse du moteur LS100L**

***Remarque :***

On nous a fait montrer précédemment que pour assurer la vitesse de levée voulue, il fallait une vitesse de rotation moteur de 1500 tr.min$^{-1}$, ce que l'on peut atteindre mais avec un couple moteur nul !!!

On peut supposé que l'écart par rapport à l'exigence exprimée dans le cahier des charges étant faible, le choix du moteur proposé a pu être tout de même validé sur ce critère.

**Q8 :** *Phase de démarrage*

**a -** *Déterminer, lors de la phase de démarrage, la relation numérique entre le couple $C_m$ et l'accélération angulaire de l'arbre moteur (exprimée en rad/s$^2$).*

**b -** *Déterminer la durée de la phase d'accélération. Conclure quant à la pertinence du choix du moteur pour cette phase.*

**a-**

Dans le tableau, on lit $\frac{M_D}{M_N} = 2{,}5$, on dispose donc d'un couple de $M_D = 2{,}5.14{,}5 = 36{,}25$ Nm lors de la phase de démarrage.

En reprenant le théorème de l'énergie cinétique obtenu à la question 6 : $A_1\ddot{\theta}_1 = \eta_g C_m - M_5 g r_g$, on obtient : $\ddot{\theta}_1 = \frac{\eta_g C_m - M_5 g r_g}{A_1} = \frac{0{,}324.M_D - 6000.9{,}81.6{,}36.10^{-5}}{10{,}5.10^{-3}} = 762 \text{ rad.s}^{-1}$, $\boxed{\ddot{\theta}_1 = 762 \text{ rad.s}^{-1}}$

 **Emmanuel FARGES** 