ESSEC Mathématiques II

OPTION ÉCONOMIQUE CONCOURS 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E_n = \{1\,;2\,;\ldots;n\} = [\![1\,; n]\!]$ et Ω l'ensemble des permutations sur E_n. Pour tout ensemble fini A, on note card(A) son cardinal, c'est à dire son nombre d'éléments.

On note $\binom{n}{k}$, ou C_n^k, le nombre $\begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On rappelle enfin la formule de Poincaré, sous sa forme ensembliste : soit A un ensemble de cardinal fini, et $A_1\,; A_2\,;\ldots;A_n$ des sous-ensembles de A. Alors

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} card\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$$

Partie I

1°) Rappeler la valeur de card(Ω). Pour tout i, $i \in E_n$, on pose $A_i = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega(i) = i\}$

2°) Montrer que pour tout $k \in E_n$ et pour tout $i_1\,; i_2\,;\ldots;i_k$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = (n-k)!$$

En déduire, pour tout $k \in E_n$, la valeur de $\quad s_k = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} card\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$

3°) On note $D_{n;0} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \forall\, i \in E_n, \omega(i) \neq i\}$

a) Montrer que $d = \text{card}(D_{n;0}) = n! - \text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n!\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)$

Pour tout $k \in E_n$, on appelle $D_{n;k}$ l'ensemble formé des $\omega \in \Omega$ tels qu'il existe $i_1\,; i_2\,;\ldots;i_k$ tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ et tel que pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, on a $\omega(i_j) = i_j$, et pour tout l $E_n \backslash \{i_1\,; i_2\,;\ldots;i_k\}$, on a $\omega(l) \neq l$.

b) Montrer que pour tout $k \in E_n$, $d_k = \text{card}(D_{n;k}) = \binom{n}{k} card\left(d_{n-k;0}\right)$

c) Vérifier que pour tout $k \in E_n$ $\quad d_k = s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \binom{k+2}{k} s_{k+2} + \ldots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s_n$

4°) On pose $d_0 = s_0 = 0$.

a) Écrire la matrice du système d'équations qui donne $(d_0\,; d_1\,;\ldots;d_n)$ en fonction de $(s_0\,; s_1\,;\ldots;s_n)$.

b) En se plaçant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, donner l'expression de l'endomorphisme représenté, dans la base canonique, par la transposée de cette matrice.

c) En déduire que cet endomorphisme est inversible en exprimant son inverse.
d) En déduire la relation qui lie $(d_0 ; d_1 ; \dots ; d_n)$ à $(s_0 ; s_1 ; \dots ; s_n)$.

Partie II

Afin de lancer un nouveau produit sur le marché, le service marketing d'une entreprise propose au directeur général la campagne suivante :

- mettre en vente au prix unitaire de b euros, n exemplaires du produit,
- chaque exemplaire sera numéroté de façon apparente d'un nombre compris entre 1 et n,
- à l'intérieur du produit, et de façon cachée, se trouve un second numéro,
- l'acheteur qui trouvera à l'intérieur de l'exemplaire un numéro identique à celui figurant à l'extérieur gagnera B euros.

On suppose que les numéros cachés sont tous différents, compris entre 1 et n et choisis « au hasard ».
Avant de donner son accord, le directeur général souhaite étudier le coût d'une telle campagne.
Afin de formaliser la notion de choix au hasard, et pour toute la suite du problème, on munit $(\Omega ; \mathscr{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme discrète P définie pour tout $A \subseteq \Omega$ par $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Enfin, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de gagnants.

1°) a) En utilisant les résultats de la question I.3, déterminer la loi de X_n.

b) Établir les égalités suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1$

(on justifiera de manière précise l'interversion des deux signes sommes)

2°) Pour tout $A \subseteq W$, on note 1_A la variable aléatoire définie par $1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Justifier l'égalité : $X_n = 1_{A_1} + 1_{A_2} + \dots + 1_{A_n}$, et en déduire l'espérance de la variable aléatoire X_n.

3°) a) Montrer que : $X_n^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} + \sum_{1 \le i \ne j \le n} 1_{A_i \cap A_j}$.

b) En déduire la variance $V(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

4°) a) Montrer que l'entrée aléatoire du capital C_n d'argent dû à l'opération de commercialisation des n exemplaires du produit, est donné par : $C_n = n\,b - B\,X_n$.
En déduire sa valeur moyenne $E(C_n)$, ainsi que le risque donné par l'écart type $\sigma(C_n)$.

b) Quelle sera d'après vous, la réponse du directeur général ?

5°) Montrer que le gain d'un acheteur ayant acquis un seul produit est donné par : $G_n = B\,Y_n - b$.
où Y_n est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
En déduire le gain moyen de l'acheteur.

Partie III

1°) Montrer que la suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

2°) Montrer que pour tout $k \in E_n$, $\displaystyle\left| P(X_n = k) - \frac{e^{-1}}{k!} \right| = \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right|$

3°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{i!} \le \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+1)^k} \le \frac{2}{m!}$

(on remarquera que pour tout $k \ge 1$, $m(m+1)\dots(m+k-1) \ge m^k$)

4°) En déduire que : $\sum_{k=0}^{n}\left|P\left(X_n=k\right)-\frac{e^{-1}}{k\,!}\right|\le 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!\left(n-k+1\right)!}\le\frac{2^{n+2}}{\left(n+1\right)!}$.

5°) On considère les instructions Pascal suivantes :

```
eps := 0.00001;
x := 2; k := 2;
While x > eps/2 do
   begin
   x := x*(2/k) ;
   k := k+1 ;
   end ;
writeln(k)
```

a) On entre dans la boucle While avec $x=2$. On suppose qu'on est passé $j\ge 1$ fois dans cette boucle. Quelle est la valeur de x à l'entrée de la boucle la fois suivante ?

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n=\frac{2^{n+1}}{\left(n+1\right)!}$ est décroissante, et admet une limite que l'on calculera.

c) En déduire que la boucle While ci-dessus se termine.

d) La valeur affichée par la dernière ligne est 11 . Que représente-t-elle ?

Partie IV

On suppose dans cette partie qu'un acheteur a acquis l, $(l\ge 1)$, exemplaires du produit. L'ensemble de ces exemplaires est noté $\mathrm{L}=\{j_1\,;j_2\,;\,...\,;\,j_l\}$.
On note Y_n^l la variable aléatoire égale au nombre d'exemplaires gagnants du produit parmi ces l exemplaires achetés.

1°) On rappelle que pour tout $A\subseteq W$, 1_A est la variable aléatoire définie par $1_A(\omega)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad \omega\in A\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Justifier l'égalité : $Y_n^l=1_{A_{j_1}}+1_{A_{j_2}}+\ldots+1_{A_{j_l}}$

En déduire l'espérance $E\left(Y_n^l\right)$ de la variable aléatoire Y_n^l.

2°) a) Montrer que : $\left(Y_n^l\right)^2=\sum_{i=1}^{l}1_{A_{j_i}}+\sum_{1\le i\ne k\le l}1_{A_{j_i}\cap A_{j_k}}$

b) En déduire la variance $V\left(Y_n^l\right)$ de la variable aléatoire Y_n^l .

3°) a) Montrer que le gain de l'acheteur est égal à $G_n=B\,Y_n^l-b\,l$.

b) Déterminer son gain moyen, ainsi que l'écart type de ce gain.

c) Du point de vue de l'acheteur, est-il intéressant d'acquérir plusieurs exemplaires du produit ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2004

ESSEC 2004 VOIE E

CORRIGE

PARTIE I

1)

Ω est l'ensemble des listes sans répétition (ou des permutations) formées avec les éléments de E_n , donc $\boxed{\text{Card}(\Omega) = n!}$

2)

- Pour construire une permutation de $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ il suffit de placer les nombres $i_1, i_2, \ldots i_k$

dans les cases portant le même numéro (il y a une seule façon de faire cela) puis de placer de toutes les manières possibles les $n-k$ numéros restants dans les $n-k$ cases restantes ;

il y a $(n-k)!$ façons d'effectuer cette répartition, donc $\boxed{\text{Card} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = (n-k)!}$

Remarquons que ce nombre ne dépend pas des valeurs des numéros $i_1, i_2, \ldots i_k$, mais seulement du nombre k de ces numéros.

- Pour avoir la valeur de s_k il suffit :

i) de compter le nombre de façons de choisir les numéros $i_1, i_2, \ldots i_k$ (il y en a $\binom{n}{k}$) et de les ranger à chaque fois dans l'ordre strictement croissant (il y a une seule façon d'effectuer ce rangement)

ii) de multiplier ce résultat $\binom{n}{k}$ par le cardinal de $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$, c'est-à-dire par $(n-k)!$

Finalement : $s_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!$; c'est-à-dire $\boxed{s_k = \dfrac{n!}{k!}}$

3–a)

Une permutation ω appartient à $D_{n,0}$ si et seulement si $\forall i \in E_n$, $\omega(i) \neq i$, ce qui signifie que $\forall i \in E_n$, $\omega \notin A_i$, ou encore, $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Ce dernier résultat s'écrit aussi :

$\omega \in \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}$ où $\overline{(A)}$ veut dire le complémentaire de A dans Ω.

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Card}(D_{n,0}) \quad = \mathrm{Card}\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

D'après la formule de Poincaré ,

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}s_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{n!}{k!}\\ &= n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$\begin{aligned} d \quad &= n! - n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\\ &= n! + n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1+1}\frac{1}{k!}\\ &= n!\Big(1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}\Big)\\ &= n!\Big(\sum_{\underline{k=0}}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}\Big) \qquad \text{car } 1 = \frac{(-1)^0}{0!}\end{aligned}$$

En remplaçant k par i, on obtient la formule demandée :

$$\boxed{d = n!\Big(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\frac{1}{i!}\Big)}$$

3–b)

Pour construire une permutation ω de $D_{n,k}$, il suffit

i) de choisir k nombres parmi n ,

ii) de les placer respectivement dans les cases ayant les mêmes numéros ,

iii) de répartir, de toutes les manières possibles, les $n-k$ nombres restants dans les $n-k$ cases restantes de telle sorte qu'aucun de ces nombres ne se trouve dans la case portant le même numéro que lui .

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k numéros (distincts) parmi n : il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de réaliser *i)*.

Il y a une seule façon de placer ces k nombres dans les k cases portant le même numéro : il y a donc une façon de réaliser *ii)* .

Il y a $\mathrm{Card}(D_{n-k,0})$ façons de placer les $n-k$ nombres restants pour réaliser *iii)* d'après la question **3 a)** appliquée en changeant n en $n-k$.

Finalement $d_k = \binom{n}{k}\mathrm{Card}(D_{n-k,0})$

3–c)

Utilisons la formule du **3 a)** en y remplaçant , pour calculer $\mathrm{Card}(D_{n-k,0})$, n par $n-k$.

$$\begin{aligned} d_k \quad &= \binom{n}{k}(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\\ &= \frac{n!}{k!}\Big(\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\Big) = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{n!}{k!i!} \qquad \textbf{(1)}\end{aligned}$$

Remarquons que $\forall i \in [\![0, n-k]\!]$,

$\begin{pmatrix} k+i \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{(k+i)!}{i!k!}$, donc $\dfrac{n!}{i!k!} = \dfrac{n!}{(k+i)!}\begin{pmatrix} k+i \\ k \end{pmatrix}$ Il s'ensuit que

$\dfrac{n!}{i!k!} = s_{k+i}\begin{pmatrix} k+i \\ k \end{pmatrix}$

Dans ces conditions la formule **(1)** s'écrit :

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \frac{n!}{k!i!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \begin{pmatrix} k+i \\ k \end{pmatrix} s_{k+i} \end{aligned}$$

On a bien en écrivant cette formule sans le symbole $\sum$:

$$\boxed{\begin{aligned} d_k &= s_k - \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} s_{k+1} + \begin{pmatrix} k+2 \\ k \end{pmatrix} s_{k+2} + \cdots + (1)^{n-k}\begin{pmatrix} k+n-k \\ k \end{pmatrix} s_{k+n-k} \\ &= s_k - \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} s_{k+1} + \begin{pmatrix} k+2 \\ k \end{pmatrix} s_{k+2} + \cdots + (1)^{n-k}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} s_n \end{aligned}}$$

4–a)

Soit M la matrice cherchée ; c'est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On doit avoir $\begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_k \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

Pour $j \;/\; 1 \leq j \leq n$, la ligne numéro $j+1$ de M est la ligne qui doit donner d_j par la formule précédente $d_j = s_j - \begin{pmatrix} j+1 \\ j \end{pmatrix} s_{j+1} + \begin{pmatrix} j+2 \\ j \end{pmatrix} s_{j+2} + \cdots + (1)^{n-j}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} s_n.$ **(2)**

- La $(j+1)$ ème ligne est donc :

$$\left(\underbrace{0 \quad 0 \ldots \quad 0 \quad 1}_{j \text{ termes}} \quad -\begin{pmatrix} j+1 \\ j \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j+2 \\ j \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (-1)^{n-j}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \right)$$

- Ainsi, la deuxième ligne, obtenue pour $j=1$ est :

$$\left(0 \quad 1 \quad -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (-1)^{k-1}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

La troisème ligne, obtenue pour $j=2$ est :

$$\left(0 \quad 0 \quad 1 \quad -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (-1)^{k-1}\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (-1)^{n-1}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Et ainsi de suite....

Comme $d_0 = d$ et $s_0 = n!$, on peut aussi écrire, d'après 3–a),

$$d_0 = d = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = s_0 - s_1 + \cdots + (-1)^k s_k + \cdots + (-1)^n s_n.$$

- Donc la première ligne est $(1 \quad -1 \quad 1 \quad \ldots \quad (-1)^k \quad \ldots \quad (-1)^n)$

On peut alors écrire la matrice M :